AED2 - Aula ~~14~~15.2
Ordenação por contagem (countingSort)

Este método é especializado na ordenação de vetores de inteiros pequenos,

- e não é baseado na comparação entre elementos do vetor.
  - Por isso, vence o limitante inferior Omega(n lg n) para ordenação.

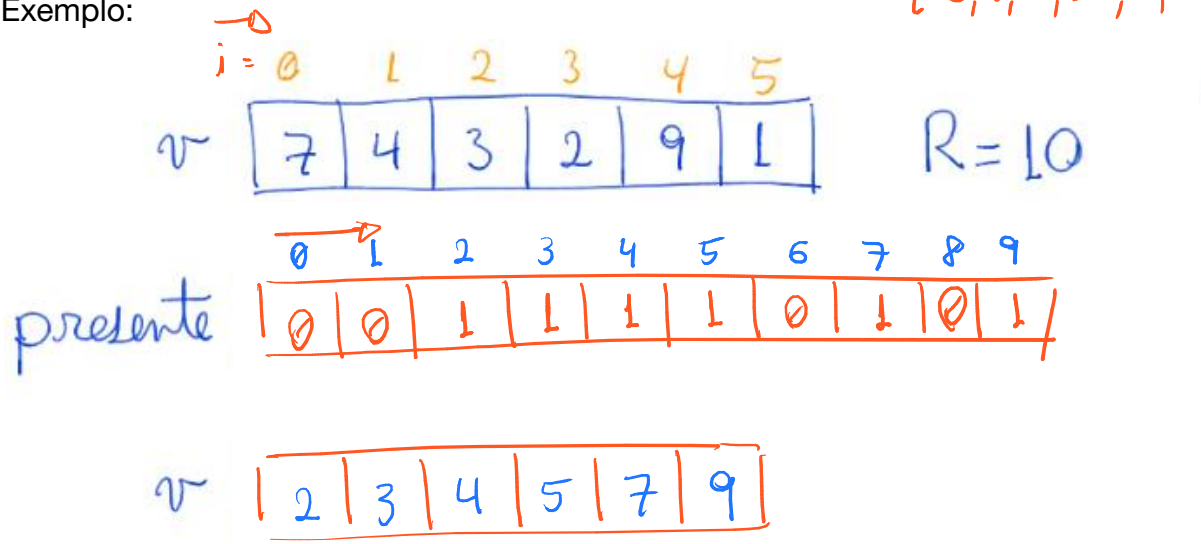
Para desenvolver a ideia do algoritmo vamos supor que no vetor v de tamanho n

- só existem inteiros entre 0 e R - 1.

Ideia 1: para simplificar, primeiro supomos que não existem elementos repetidos.

- Neste caso, podemos alocar um vetor auxiliar *presente*
  - e inicializar *presente* com 0.
- Percorrer v com um índice i, marcando
- Percorrer *presente* da esquerda para a direita com um índice *valor*,
  - colocando *valor* na próxima posição livre de v
    - se *presente*[*valor*] = 1.

Exemplo:



Código:

```
// ordena um vetor v[0 .. n-1] de inteiros em [0, R)
// desde que não existam elementos repetidos
void countingSortErrado1(int v[], int n, int R) {
    int *presente, valor, i;
    presente = malloc(R * sizeof(int));
    for (valor = 0; valor < R; valor++)
        presente[valor] = 0;
    for (i = 0; i < n; i++)
        presente[v[i]] = 1;
    i = 0;
    for (valor = 0; valor < R; valor++)
        if (presente[valor] == 1) v[i++] = valor;
    free(presente);
}
```

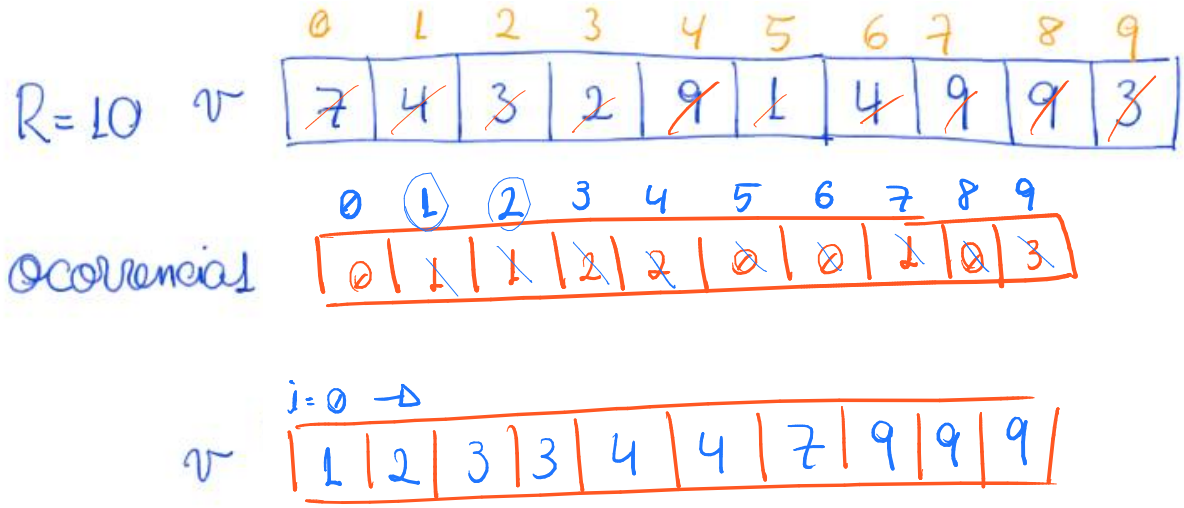
Agora vamos considerar que podem existir elementos repetidos.

- Para tanto, vamos usar o número de ocorrências de um elemento.

Nesta nova abordagem, vamos alocar um vetor auxiliar *ocorrencias*.

- Inicializar *ocorrencias* com 0.
- Percorrer v com um índice i,
  - fazendo
- Assim, para cada *valor* em [0, R), ao final do laço
  - *ocorrencias*[*valor*] possuirá o número de ocorrências de *valor*.
- Percorrer *ocorrencias* da esquerda para a direita com um índice *valor*,
  - colocando *ocorrencias*[*valor*] cópias de *valor*
    - nas próximas posições livres de v.

Exemplo:



Código:

```
// ordena um vetor v[0 .. n-1] de inteiros em [0, R)
// copia ao invés de rearranjar
void countingSortErrado2(int v[], int n, int R) {
    int *ocorrencias, valor, i, repet;
    ocorrencias = malloc(R * sizeof(int));
    for (valor = 0; valor < R; valor++)
        ocorrencias[valor] = 0;
    for (i = 0; i < n; ++i)
        ocorrencias[v[i]] += 1;
    i = 0;
    for (valor = 0; valor < R; valor++)
        for (repet = 0; repet < ocorrencias[valor]; repet++)
            v[i++] = valor;
    free(ocorrencias);
}
```

Apesar de aparentarem ser corretos, tanto esse último algoritmo quanto o primeiro,

- apresentam um erro fundamental. Qual?

Apesar de aparentarem ser corretos, esses últimos algoritmos tem um erro. Qual?

- Eles não estão ordenando os elementos originais,
  - mas apenas criando cópias das chaves destes.
- Esse é um problema grave quando as chaves sendo ordenadas
  - são parte de elementos que possuem outras informações,
    - como registros ou ponteiros, por exemplo.
- Ou ainda, quando são partes de uma chave maior, como veremos
  - na aplicação do countingSort como subrotina do LSD radixSort.

Para resolver esse problema, temos que percorrer *v* movendo os elementos

- para suas respectivas posições ordenadas. Para tanto, é preciso saber
  - o # de elementos *ocorr_pred*[*val*] que ocorre antes de cada chave *val*.
- Assim, vamos calcular o número de ocorrências dos predecessores
  - usando o número de ocorrências *ocorrs*[*val*] de cada chave *val*.
- O número de ocorrências dos predecessores de *val* é
  - *ocorr_pred*[*val*] = ocorrs[0] + ocorrs[1] + ... + ocorrs[val - 1]
- Podemos usar uma definição recursiva:
  - se *val* > 0 então ocorr_pred[val] = ocorr_pred[val - 1] + ocorrs[val-1]
  - se *val* = 0 temos ocorr_pred[0] = 0
- Essa definição deriva da seguinte observação

  ocorr_pred[*val*] = ocorrs[0] + ... + ocorrs[val-2] + ocorrs[val - 1]

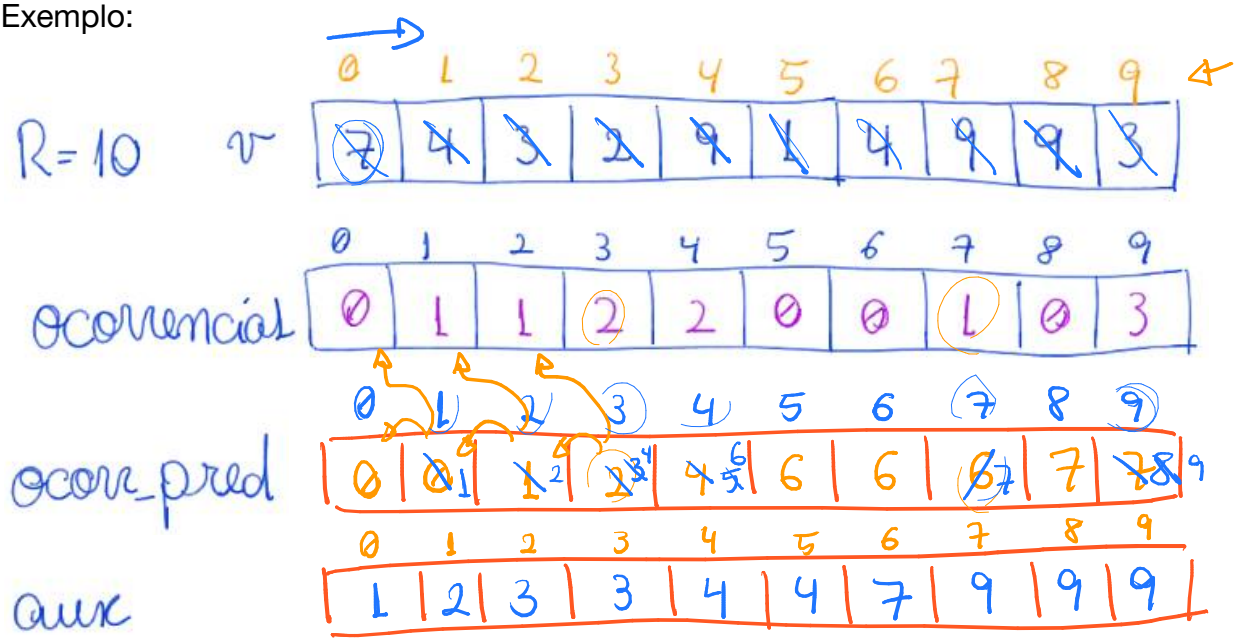
  ocorr_pred[*val* - 1] = ocorrs[0] + ... + ocorrs[val-2]
- Portanto, *ocorr_pred*[*val*] = ocorr_pred[val - 1] + ocorrs[val - 1]

- Note que, ocorre_pred[val] é a posição em que os elementos de chave val
  - devem começar a ser colocados no vetor ordenado.

Também precisaremos de um vetor auxiliar *aux*[0 .. *n* - 1]

- para copiar um elemento de *v* para uma posição diferente em *aux*
  - sem corromper elementos ainda não copiados de *v*.

Exemplo:



Código:

```c
// ordena um vetor v[0 .. n-1] de inteiros em [0, R)
void countingSort(int v[], int n, int R) {
    int val, i;
    int *ocorrencias, *ocorr_pred, *aux;
    ocorrencias = malloc(R * sizeof(int));
    ocorr_pred = malloc(R * sizeof(int));
    aux = malloc(n * sizeof(int));

    for (val = 0; val < R; val++) ocorrencias[val] = 0;
    for (i = 0; i < n; i++) ocorrencias[v[i]] += 1;

    ocorr_pred[0] = 0;
    for (val = 1; val < R; val++)
        ocorr_pred[val] = ocorr_pred[val-1] + ocorrencias[val-1];
    // Elementos iguais a val começam no índice ocorr_pred[val]
    for (i = 0; i < n; i++) {
        val = v[i];
        aux[ocorr_pred[val]] = v[i];
        ocorr_pred[val]++; // atualiza o número de predecessores
    }
    // aux[0 .. n-1] está em ordem crescente
    for (i = 0; i < n; ++i) v[i] = aux[i];
    free(ocorrencias);
    free(ocorr_pred);
    free(aux);
}
```

Esta última versão do countingSort está correta.

- No entanto, ela desperdiça memória
  - por alocar espaço para *ocorrencias* e para *ocorr_pred*.
- Observe que, só usamos *ocorrencias* para calcular os valores de *ocorr_pred*.
  - Será que conseguimos economizar a memória de um desses vetores?
- Uma tentativa envolve alocar um único vetor *ocorr_pred*,
  - usá-lo, inicialmente, para armazenar
    - o número de ocorrências das chaves,
  - e reaproveitá-lo para armazenar
    - o número de ocorrências dos predecessores.
- Isso é possível,
  - mas exigirá algumas mudanças sutis.

Vamos usar um único vetor *ocorr_pred* para, inicialmente,

- armazenar o número de ocorrências das chaves,
- e, depois, reaproveitá-lo para armazenar
  - o número de ocorrências dos predecessores.

O(R)

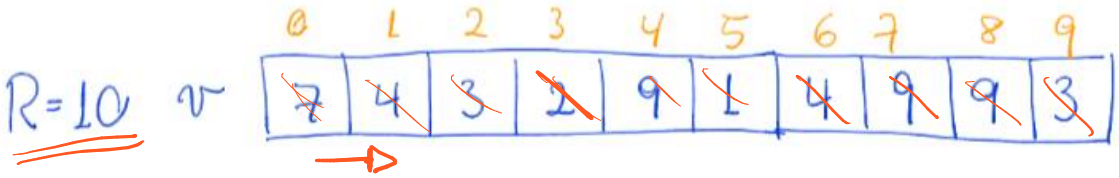
Isso exigirá algumas mudanças sutis. Em particular, vamos

- armazenar o número de ocorrências da chave *val* em *ocorr_pred*[*val* + 1].
- Com isso, a princípio a posição *ocorr_pred*[*val*]
  - terá o número de ocorrências de *val* - 1.

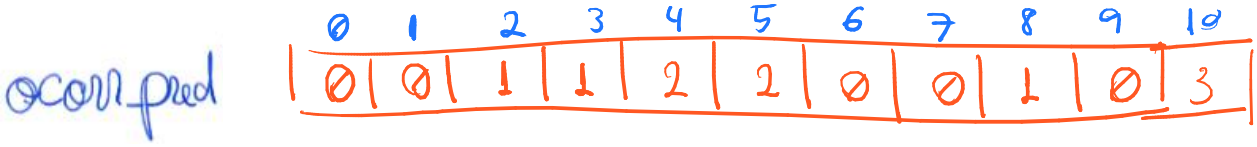
ocorr_pred[val] = # ocorrências de val - 1

- Lembrando que, para *val* > *0*,
  - *ocorr_pred*[*val*] = *ocorr_pred*[*val* - 1] + ocorrs[*val* - 1].
- Assim, para que *ocorr_pred*[*val*] passe a armazenar
  - o número de ocorrências dos predecessores
    - basta somar a ele *ocorr_pred*[*val* - 1],
  - já que o número de ocorrências de *val* - 1 já está lá.

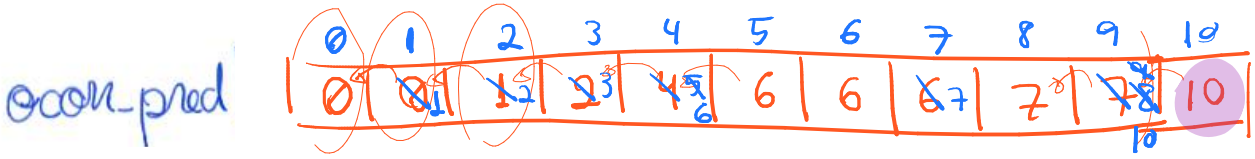
Exemplo:



ocorr_pred[valor] é o # de ocorrências de valor - 1

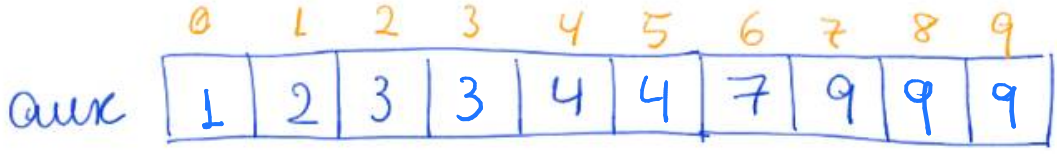


Para (valor = 1 até R) faça { ocorr_pred[valor] += ocorr_pred[valor - 1] }

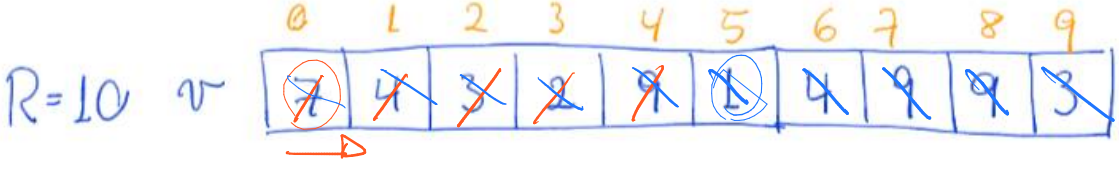


ocorr_pred[valor] passa a ter o # de ocorrências dos predecessores de valor

aux após percorrer v de 0 até 4



Vetor v original, para nos ajudar a mover os elementos para aux



Código:

```
// ordena um vetor v[0 .. n-1] de inteiros em [0, R)
void countingSort2(int v[], int n, int R) {
    int valor, i;
    int *ocorr_pred, *aux;
    ocorr_pred = malloc((R + 1) * sizeof(int));
    aux = malloc(n * sizeof(int));
    for (valor = 0; valor <= R; valor++)
        ocorr_pred[valor] = 0;
    for (i = 0; i < n; i++) {
        valor = v[i];
        ocorr_pred[valor + 1] += 1;
    }
    // ocorr_pred[valor] é o núm. de ocorrências de valor - 1
    for (valor = 1; valor <= R; valor++)
        ocorr_pred[valor] += ocorr_pred[valor - 1];
    // ocorr_pred[valor] é o núm. de ocorrs dos predecessores de
    // valor. Logo, a cadeia de elementos iguais a valor deve
    // começar no índice ocorr_pred[valor] no vetor ordenado.
    for (i = 0; i < n; i++) {
        valor = v[i];
        aux[ocorr_pred[valor]] = v[i];
        ocorr_pred[valor]++; // atualiza o número de predecessores
    }
    // aux[0 .. n-1] está em ordem crescente
    for (i = 0; i < n; ++i) v[i] = aux[i];
    free(ocorr_pred);
    free(aux);
}
```

Curiosidade: note que, *ocorr_pred* foi alocado com uma posição a mais,

- mas o único motivo para tanto é evitar que, no segundo laço
  - seja acessada uma posição de memória inválida.
- Isso porque, se *valor* = v[i] = R - 1 temos que
  - *ocorr_pred*[*valor* + 1] = *ocorr_pred*[R] recebe uma atribuição.

Eficiência de tempo: countingSort leva tempo da ordem de n + R, i.e., O(n + R).

- Isso porque cada laço itera por R ou n vezes,
  - e não temos laços aninhados.
- Se R é pequeno (da ordem de n no máximo),
  - isso é melhor que a eficiência O(n log n) de algoritmos como
    - mergeSort, quickSort e heapSort.
- Por isso, countingSort é o método preferido para ordenar
  - vetores cujas chaves são inteiros pequenos.

Eficiência de espaço: O(n + R), já que precisamos de

- um vetor *ocorr_pred* de tamanho proporcional a R
    - e um vetor aux de tamanho proporcional a n.

Estabilidade:

- countingSort é estável.

Curiosidade: A estabilidade do countingSort é a propriedade chave

- que permite aplicá-lo ao LSD radix sort, que veremos na próxima aula.

Quiz1: A ordem de alguns laços do algoritmo é decisiva

- para manter a estabilidade, enquanto outros laços
    - poderiam ser invertidos ou seguir uma ordem arbitrária.
- Identifique a relevância da ordem de cada laço do algoritmo.

Quiz2: Como generalizar o countingSort para lidar com inteiros

- que estão em um intervalo pequeno que não começa em 0?
- Na resposta, suponha que os inteiros estão no intervalo [lim_inf, lim_sup).