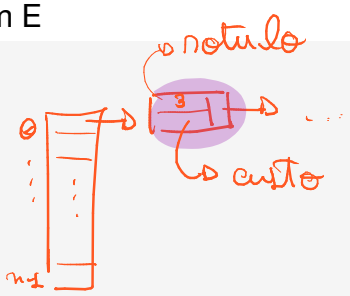
AED2 - Aula ~~26~~27
Caminhos mínimos ponderados em DAGs e em grafos sem custos negativos

Vamos falar do problema de encontrar caminhos mínimos em grafos ponderados.

Neste problema recebemos como entrada:

- Um grafo G = (V, E),
- com custo c(e) em cada aresta e em E

```
typedef struct noh Noh;
struct noh {
    int rotulo;
    int custo;
    Noh *prox;
};
```



- e um vértice origem s.

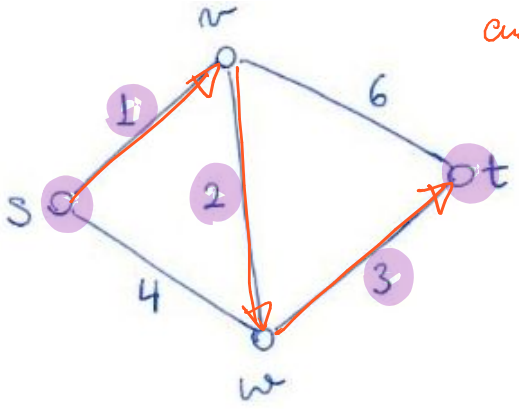
Quiz: Como adaptar a imp. da matriz de adjacências p/ lidar c/ custos nas arestas?

Nosso objetivo é encontrar:

- O valor/custo do caminho mínimo de s até cada vértice v em V,
  - i.e., a distância de s a v.
- Também gostaríamos que esses caminhos fossem devolvidos.

Exemplo de grafo com custos nas arestas:

- Caminho mínimo de s até t.



custo = 1 + 2 + 3 = 6

Mas, busca em largura não encontra caminhos mínimos

- ao explorar o grafo em camadas centradas em s?
  - Por que voltamos a esse problema? O que mudou?

Resp.: Busca em largura só funciona em grafos não ponderados,

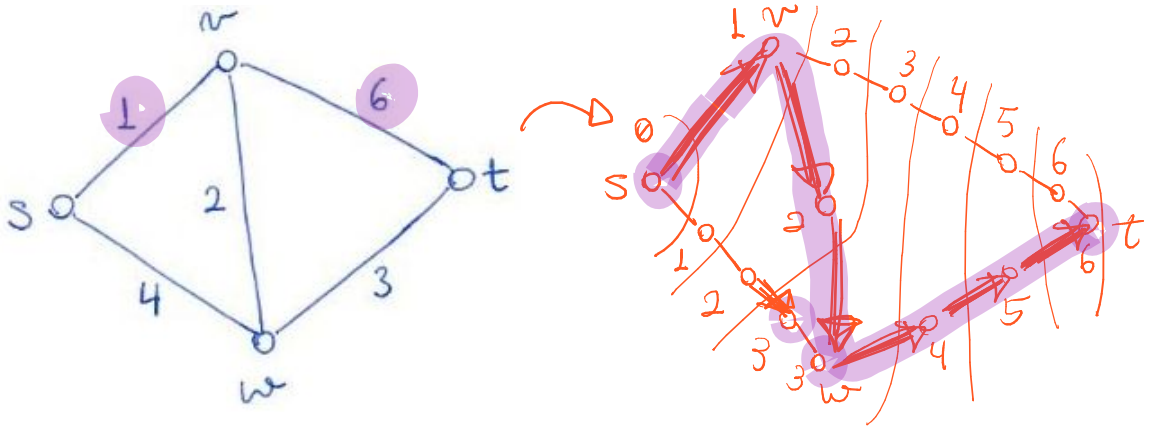
- ou seja, naqueles em que toda aresta tem custo uniforme.
- Note que, se aplicarmos busca em largura no exemplo anterior,
  - ela não nos devolve corretamente o caminho mínimo de s a t.

Para contornar este problema, observe que podemos converter

- uma entrada do problema de caminhos mínimos ponderados
    - em uma entrada não ponderada. Como?

Resp.: Substituindo cada aresta e com custo c(e)

- por um caminho com c(e) arestas e c(e) - 1 novos vértices.
    - O seguinte exemplo mostra esse procedimento

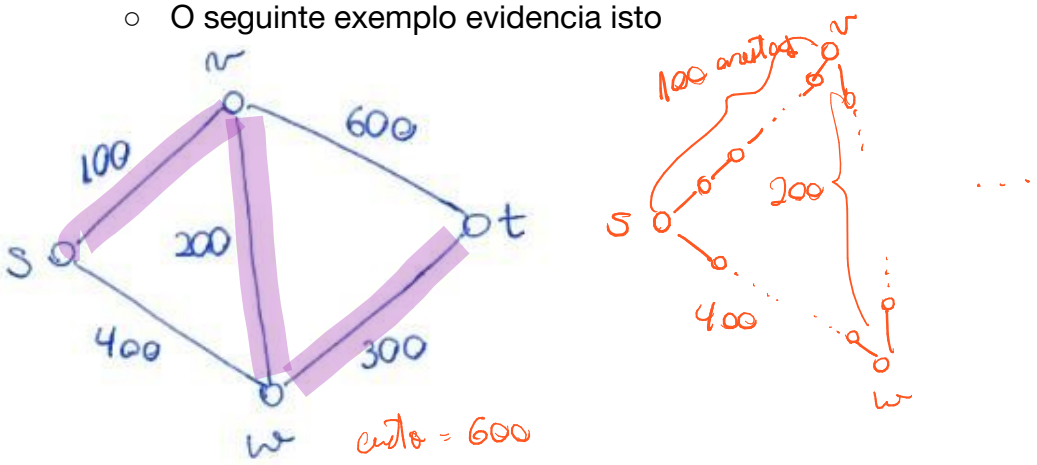


- Se utilizarmos o algoritmo de busca em largura neste grafo
    - resolvemos o problema de caminhos mínimos ponderados.

No entanto, essa solução pode não ser eficiente. Por que?

Resp.: Porque o grafo modificado tem o número de vértices e arestas

- aumentado em proporção ao custo c( ) das arestas.
    - O seguinte exemplo evidencia isto



- Observe que, o grafo modificado pode crescer exponencialmente,
    - pois um custo que é representado usando k de bits
        - pode implicar da ordem de 2^k novos vértices.

A seguir, vamos estudar o problema de encontrar

- caminhos mínimos ponderados em um tipo de grafo específico.
- Este caso particular do problema possui uma solução muito eficiente,
    - que se baseia na solução para um problema
        - que estudamos recentemente.

Caminhos mínimos ponderados em DAGs

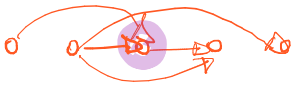
Sendo s nosso vértice origem, note que,

- se considerarmos todos os caminhos a partir de s
  - que chegam em um vértice v,
- e escolhermos o menor destes caminhos,
  - teremos o caminho de custo mínimo de s a v,
  - e o valor deste caminho é a distância desejada.
- Em geral, considerar todos os caminhos não é eficiente,
  - pois o número de caminhos cresce fatorialmente.

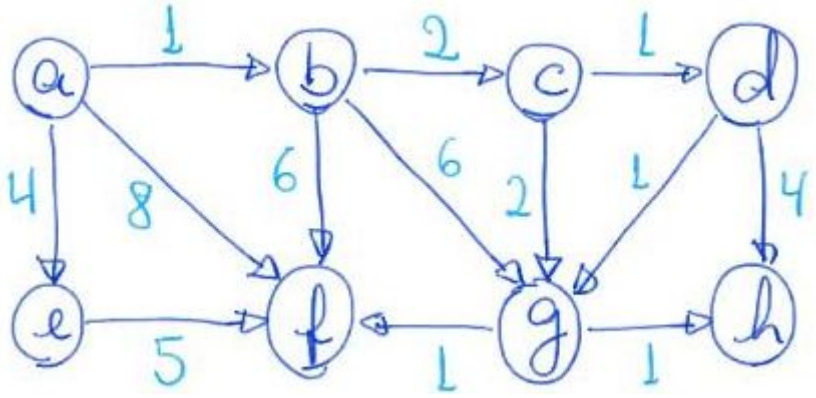
— c/ relação ao # de vértices

A ideia central do algoritmo é encontrar uma ordem

- para visitar os vértices do grafo dirigido acíclico (DAG),
  - que nos permita encontrar eficientemente
    - todos os caminhos que chegam em cada vértice.
- Como veremos a seguir, essa ordem é a ordenação topológica.



Considere o seguinte grafo dirigido acíclico com custos nos arcos.

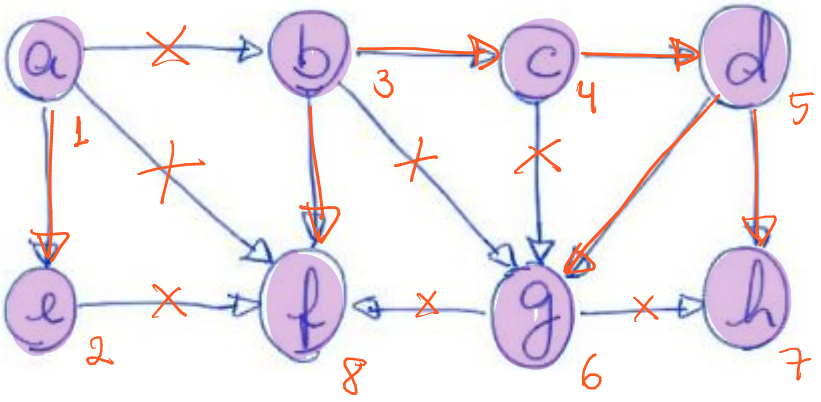


Vamos encontrar uma ordenação topológica para este DAG.

- Desconsideramos os custos nos arcos, pois eles não afetam a ordenação.

Para realizar a ordenação realizamos um loop da busca em profundidade (DFS),

- i.e., invocamos a DFS a partir de cada vértice não visitado,
  - e esta rotula cada vértice que for "finalizado" em ordem decrescente,
- lembrando que um vértice é finalizado
  - quando todos os caminhos a partir dele já foram explorados.

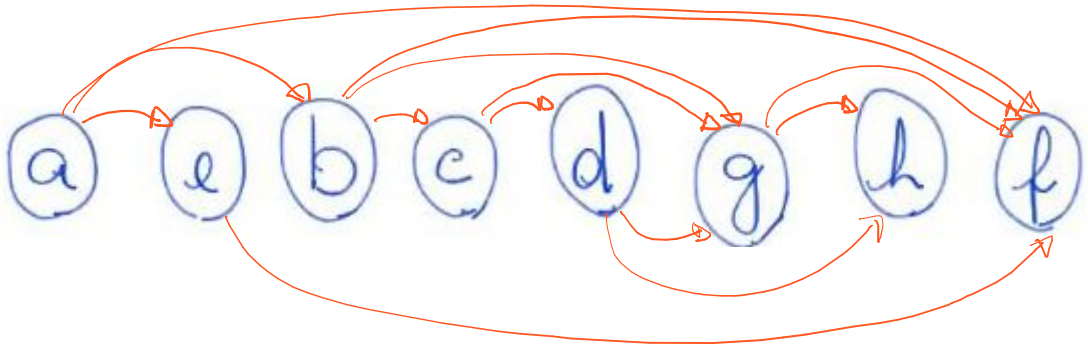


n = 8

1ª DFS começa em b

2ª DFS começa em a

Linearizando o DAG segundo a ordem topológica encontrada



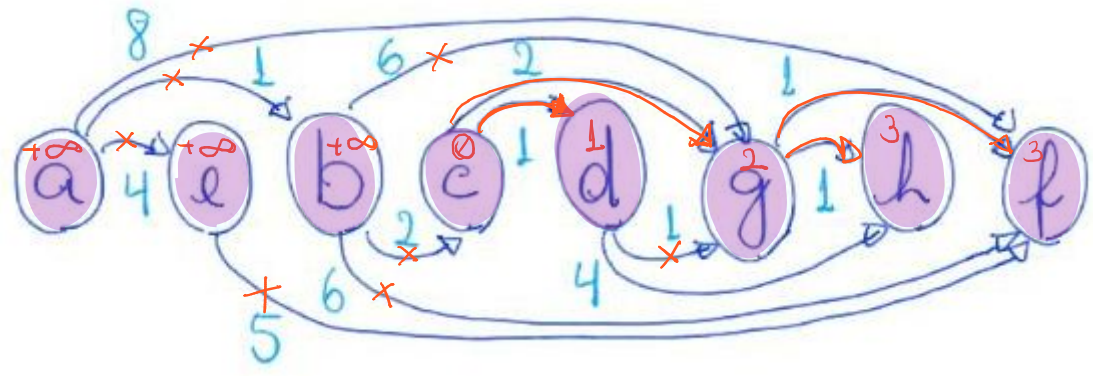
- Note que, como esperado, todos os arcos vão da esquerda para a direita.

A partir de agora consideramos os custos, já que vamos calcular as distâncias,

- e fazemos, para cada v em V,
  - dist[v] = +∞
  - pred[v] = NULL

A exceção é o vértice origem s, que recebe

- No nosso exemplo, digamos que c é o vértice origem.



Então, visitamos os vértices da esquerda para a direita,

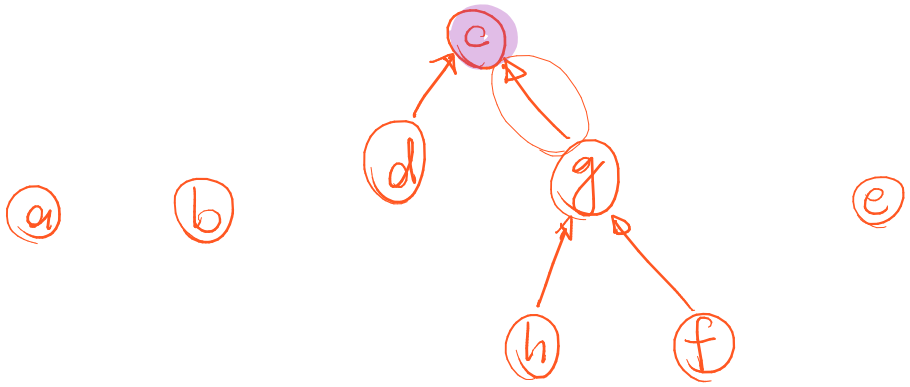
- i.e., seguindo a ordenação topológica,
  - e em cada vértice visitado consideramos os arcos que saem dele.
- Para cada arco (u, v) considerado
  - se dist[u] + c(u, v) < dist[v] atualizamos
    - dist[v] = dist[u] + c(u, v)
    - pred[v] = u

Note que, na iteração em que visitamos um vértice,

- todos os caminhos que chegam nele já foram considerados.
- Por isso, a distância da origem até o vértice é calculada corretamente.

Observe que, cada “apontador” no vetor pred corresponde

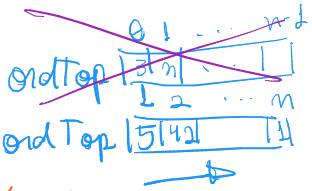
- ao antecessor de um vértice em seu caminho mínimo.
  - Por isso, pred permite reconstruir os caminhos mínimos.
- Note que, essa coleção de caminhos forma uma árvore com raiz na origem.



Pseudocódigo do algoritmo:

distancias DAG (G = (V, E), c, s)
ordem = ordenaçãoTop (G)
para cada v ∈ V faça dist [v] = +∞ e pred [v] = NULL
dist [s] = 0
para cada v ∈ V, seguindo a ordem
para cada arco (v, w)
se dist [v] + c(v, w) < dist [w]
dist [w] = dist [v] + c(v, w)
pred [w] = v

O(n + m)
O(n)
O(n+m)



Duas curiosidades são que:

- Este algoritmo funciona mesmo que os arcos tenham custos negativos,
  - pois em um DAG não é possível formar circuitos de custo negativo.
- Ele também pode ser adaptado para
  - o problema de encontrar caminhos de custo máximo,
    - que em geral é bem mais difícil,
      - justamente por ter de lidar com circuitos.

Eficiência:

- O(n + m), sendo n o número de vértices e m o número de arcos.
  - Resultado deriva da eficiência da busca em profundidade (DFS)
  - e da passada linear pelos vértices,
    - em que cada arco é considerado uma única vez.
- Note que, assim como no algoritmo de Kosaraju
  - para encontrar componentes fortemente conexos
- é importante que a ordenação topológica devolva a ordem
  - em um vetor indexado pela posição de cada vértice
    - e cujos conteúdos são os rótulos dos vértices.

Código do algoritmo para cálculo de distâncias em um DAG:

```
void distanciasDAG(Grafo G, int origem, int *dist, int *pred) {
    int i, *ordTopo;
    int v, w, custo;
    Noh *p;
    for (i = 0; i < G->n; i++) {
        dist[i] = __INT_MAX__;
        pred[i] = -1;
    }
    dist[origem] = 0;
    ordTopo = malloc((G->n + 1) * sizeof(int));
    ordenacaoTopologica(G, ordTopo);
    for (i = 1; i <= G->n; i++) {
        v = ordTopo[i];
        p = G->A[v];
        while (p != NULL) {
            w = p->rotulo;
// aumento da estrutura do grafo para armazenar custos dos arcos
            custo = p->custo;
            if (dist[w] > dist[v] + custo) {
                dist[w] = dist[v] + custo;
                pred[w] = v;
            }
            p = p->prox;
        }
    }
    free(ordTopo);
}
```

Código da ordenação topológica com pequenas modificações para esta aplicação:

```c
void ordenacaoTopologica(Grafo G, int *ordTopo) {
    int v, rotulo_atual, *visitado;
    visitado = malloc(G->n * sizeof(int));
    /* inicializa todos como não visitados */
    for (v = 0; v < G->n; v++)
        visitado[v] = 0;
    rotulo_atual = G->n;
    for (v = 0; v < G->n; v++)
        if (visitado[v] == 0)
            buscaProfOrdTopoR(G, v, visitado, ordTopo,
        &rotulo_atual);
    free(visitado);
}

void buscaProfOrdTopoR(Grafo G, int v, int *visitado, int *ordTopo,
        int *protulo_atual) {
    int w;
    Noh *p;
    visitado[v] = 1;
    /* para cada vizinho de v que ainda não foi visitado */
    p = G->A[v];
    while (p != NULL) {
        w = p->rotulo;
        if (visitado[w] == 0)
            buscaProfOrdTopoR(G, w, visitado, ordTopo,
           protulo_atual);
        p = p->prox;
    }
    // ordenação armazenada em vetor indexado por posição
    ordTopo[*protulo_atual] = v;
    (*protulo_atual)--;
}
```

Algoritmo de Dijkstra

Vamos abordar o problema de encontrar

- caminhos mínimos ponderados em grafos gerais.
- Para tratar este problema, vamos estudar o algoritmo de Dijkstra,
    - um dos maiores clássicos da computação.

Primeiro, vamos relembrar o algoritmo de busca em largura

- para cálculo de distâncias, que é generalizado pelo algoritmo de Dijkstra.

```
distâncias (G = (V,E), s)
    para todo v ∈ V faça dist[v] = +∞ e pred[v] = NULL
    dist[s] = 0
    insira s na fila Q
    enquanto Q ≠ ∅
        remova v de Q
        para cada arco (v,w)
            se dist[w] == +∞
                dist[w] = dist[v] + 1      pred[w] = v
                insira w em Q
```

No pseudocódigo de Dijkstra, para simplificar, vamos supor

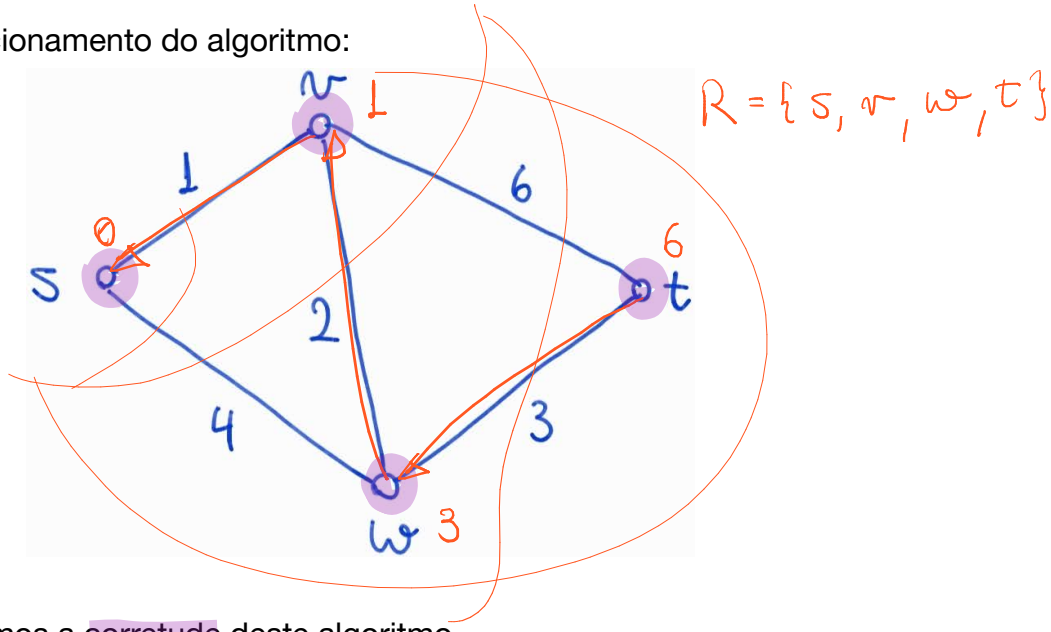
- que todos os vértices do grafo são alcançáveis a partir do vértice s.
- Se esse não for o caso, podemos focar nos vértices alcançáveis
    - realizando uma busca inicial a partir de s,
- ou modificar levemente o algoritmo de Dijkstra.
    - Quiz1: Como fazer isso?

A seguir, observem as semelhanças com o algoritmo

- para cálculo de distâncias não ponderadas, baseado na BFS?
- E com o algoritmo para cálculo de distâncias em DAGs, baseado na DFS?

```
Dijkstra (G = (V,E), c, s)
    Para todo v ∈ V faça dist[v] = +∞ e pred[v] = NULL
    dist[s] = 0
    R = {}
    enquanto R ≠ V
        → pegar v ∈ V\R com menor dist[v]      ← escolha gulosa
        adicione v a R
        para toda aresta (v,w)
            se w ∈ V\R
                se dist[w] > dist[v] + c(v,w)
                    dist[w] = dist[v] + c(v,w)
                    pred[w] = v
```

Exemplo de funcionamento do algoritmo:

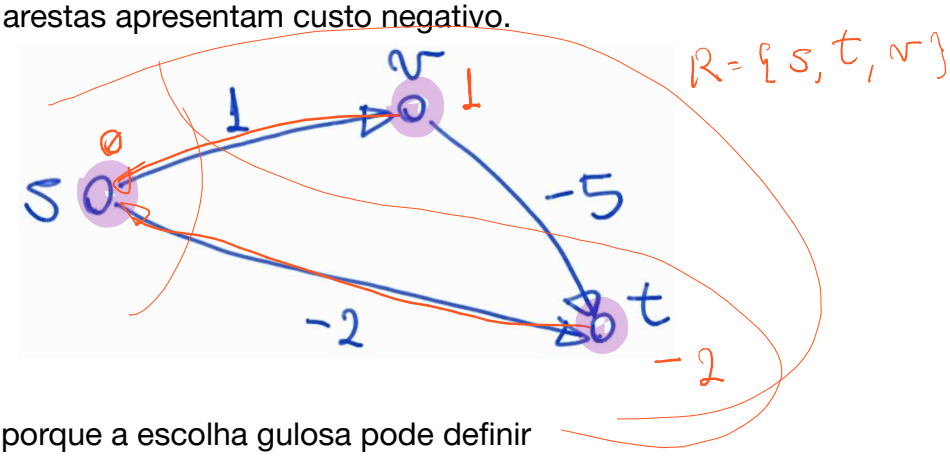


Antes de provarmos a corretude deste algoritmo,

- de tratarmos dos detalhes de implementação
    - e da eficiência do mesmo,
- vamos analisar suas limitações, a fim de compreendê-lo melhor.

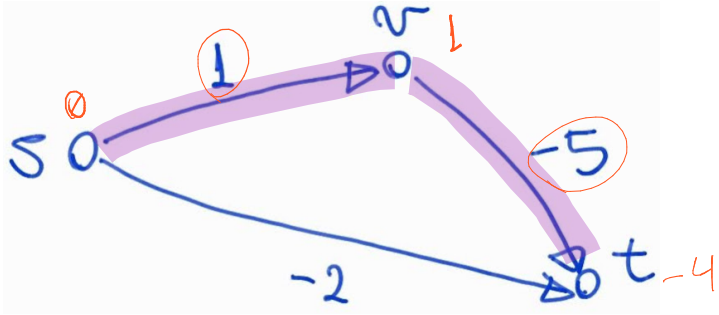
Em particular, esse algoritmo pode não devolver a solução correta

- quando as arestas apresentam custo negativo.



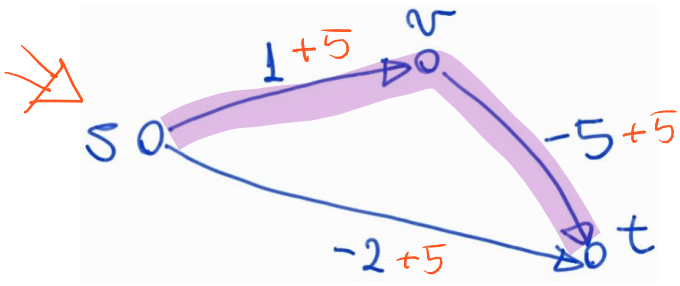
O algoritmo falha porque a escolha gulosa pode definir

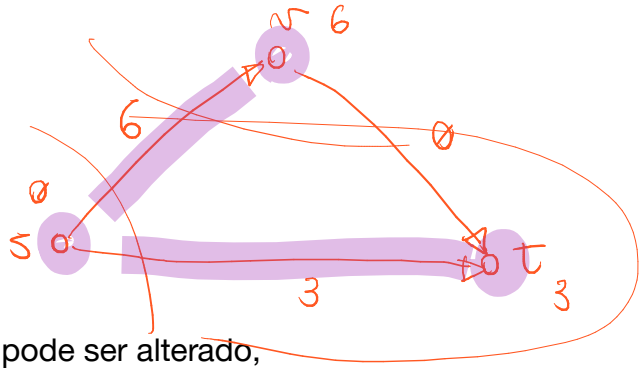
- uma certa distância para um vértice,
    - sem considerar um caminho menor.
- Isso ocorre quando tal caminho possui um custo maior na sua parte inicial,
    - que depois é reduzido por conta de arestas de custo negativo.
- No nosso exemplo, o caminho s → v → t, que tem custo -4,
    - nunca é considerado pelo algoritmo.



Bônus: redução entre problemas

Poderíamos, ainda, pensar em reduzir o problema com arestas negativas
- para o problema sem essas arestas.
- Uma tentativa seria somar o valor absoluto da aresta mais negativa
    - no comprimento de todas as arestas.
- Isso certamente faria com que o grafo não tivesse mais arestas negativas.





No entanto, o caminho mínimo entre os vértices pode ser alterado,
- pois caminhos com números diferentes de arestas
    - seriam afetados de modo distinto.

Como regra geral, quando tentamos eliminar custos negativos,
- se as soluções do seu problema tem número variado de objetos
    - (no caso de caminhos mínimos os objetos são as arestas)
- então somar um mesmo valor no custo de cada objeto
    - afetará mais o custo de soluções com maior cardinalidade,
        - e menos o custo daquelas com menor cardinalidade.
- Assim, não há garantia de que
    - a ordem relativa dos custos das soluções será preservado.
- Por isso, esse procedimento não é recomendado.

Por outro lado, se todas as soluções do seu problema
- tem a mesma cardinalidade,
    - i.e., o mesmo número de objetos,
- então somar um mesmo valor no custo de cada objeto
    - afetará homogeneamente o custo de todas as soluções.
- Neste caso, como a ordem relativa dos custos das soluções é preservada,
    - o procedimento é seguro.
- Este é o caso, por exemplo, do problema da árvore geradora mínima,
    - que é um problema central em otimização combinatória e grafos.