PAA - Aula ~~13~~ 15 - Bônus

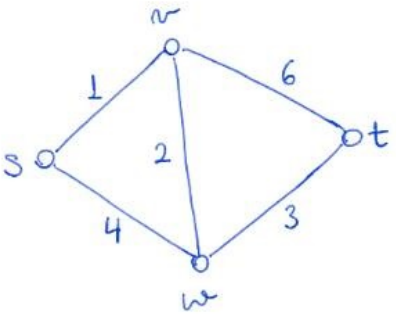
Caminhos Mínimos, Algoritmo de Dijkstra, Heap com Atualização

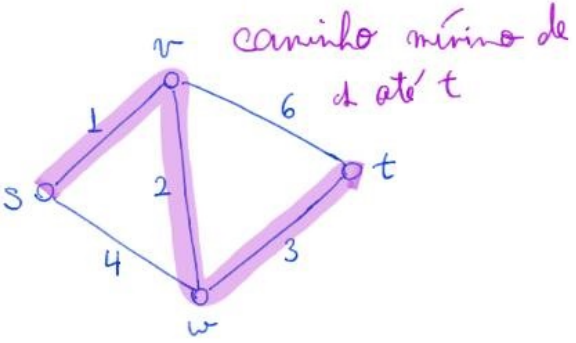
Vamos tratar do problema dos caminhos mínimos em grafos sem custos negativos.

- A entrada deste problema é um grafo G = (V, E),
    - com custo c(e) > 0 em cada aresta e em E,
    - e um vértice origem s.

Nosso objetivo é encontrar: o valor/custo do caminho mínimo de s
- até cada vértice v em V, i.e., a distância de s a v.
- Também gostaríamos que esses caminhos fossem devolvidos.

Exemplo de grafo com custos nas arestas: Caminho mínimo de s até t.

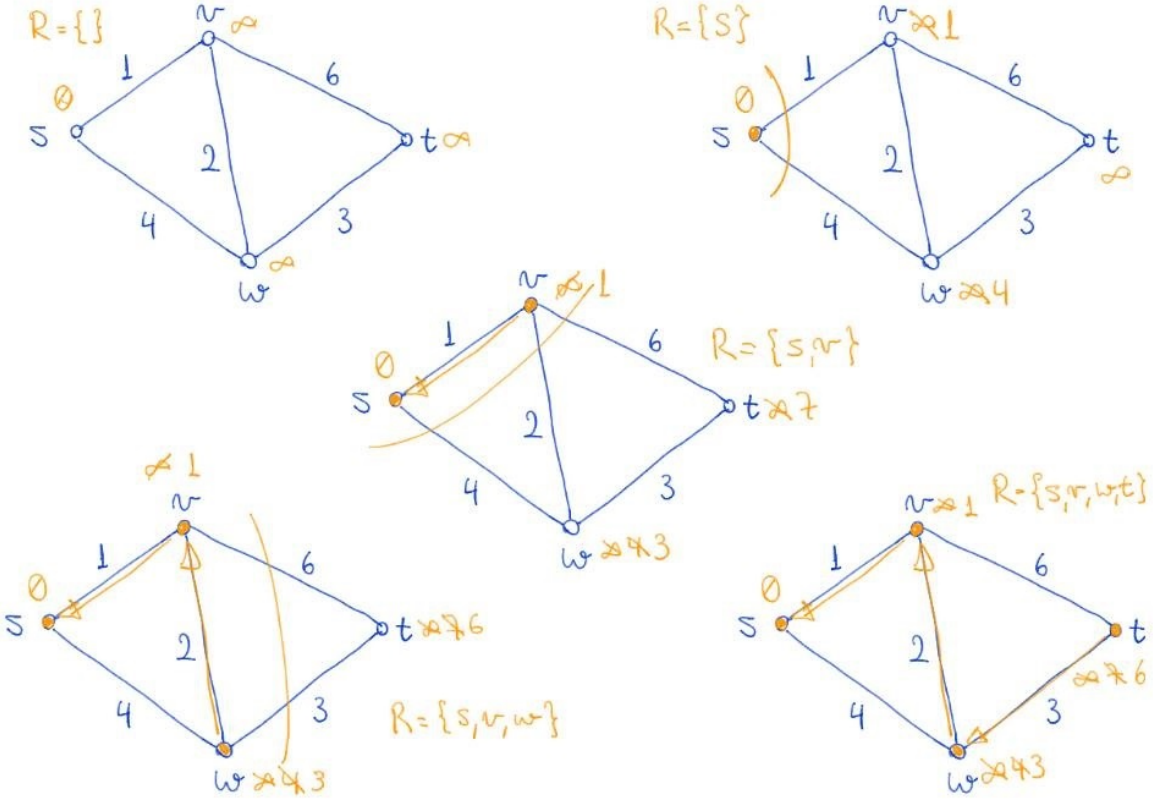




Algoritmo de Dijkstra

Vamos estudar um dos maiores clássicos da computação,

- o algoritmo para caminhos mínimos de Dijkstra, que é um algoritmo guloso.



Visto um exemplo, vamos escrever o pseudocódigo do algoritmo.

- Para simplificar, vamos supor que todos os vértices do grafo
  - são alcançáveis a partir do vértice s.
- Se esse não for o caso, podemos focar nos vértices alcançáveis
  - realizando uma busca inicial a partir de s,
- ou modificar levemente o algoritmo de Dijkstra. Quiz1: Como fazer isso?

```
Dijkstra(grafo G=(V,E), custos c, vértice s):
    marque todo v \in V com dist[v] = +\inf e pred[v] = NULL
    dist[s] = 0
    R = {} // conjunto de vértices já visitados
    enquanto R != V:
        // escolha gulosa do algoritmo de Dijkstra
        pegar o vértice v em V \ R com menor valor de dist[]
        adicione v a R
        para toda aresta (v, w) com w em V \ R:
            se dist[w] > dist[v] + c(v, w):
                dist[w] = dist[v] + c(v, w)
                pred[w] = v
```

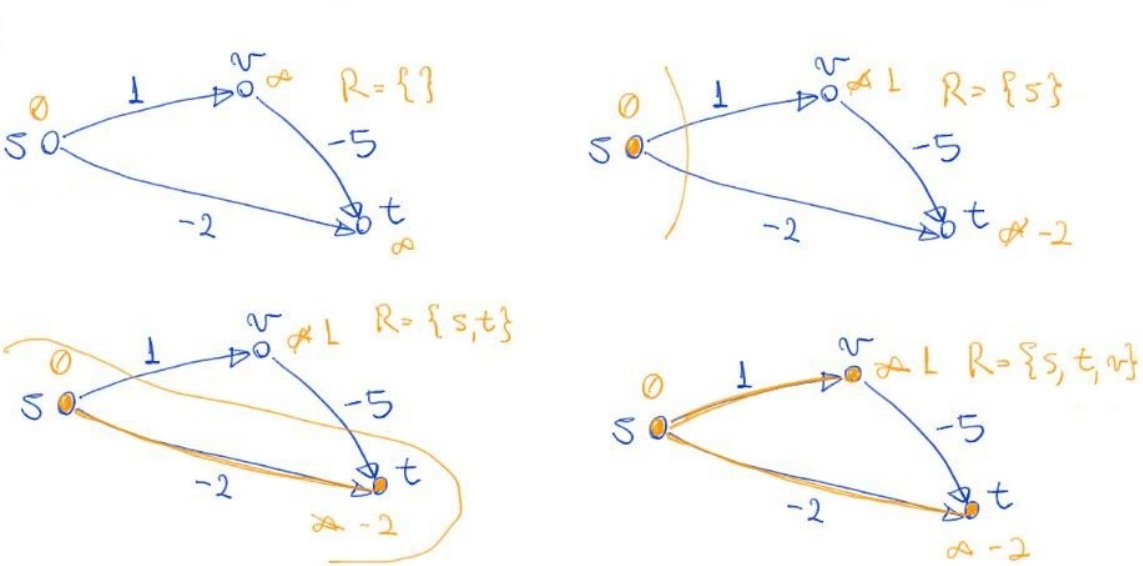
Eficiência: O(n * n + m),

- pois o último laço realiza n iterações e em cada uma delas
    - o primeiro laço interno passa por todos os vértices
        - para escolher um vértice v,
            - totalizando n * n = n^2 iterações,
    - enquanto o segundo laço interno
        - passa por todos os arcos do vértice v escolhido.
    - Com isso, ao longo do algoritmo, todo arco é visitado uma vez,
        - i.e., o segundo laço interno itera m vezes no total,
            - já que cada vértice é considerado
                - em apenas uma iteração do laço externo.
- Note que, como m <= n^2 em grafos sem auto-laços e arestas múltiplas,
    - o algoritmo tem eficiência O(n^2),
        - independente do grafo ser denso ou esparso.

Antes de provarmos a corretude do algoritmo,

- vamos entender suas limitações, a fim de compreendê-lo melhor.

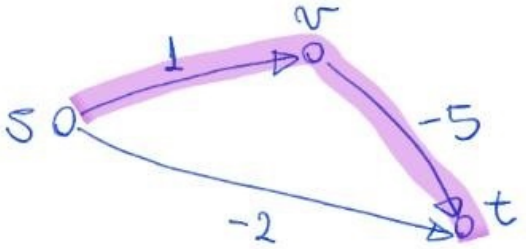
- Em particular, esse algoritmo pode não devolver a solução correta
  - quando as arestas apresentam custo negativo.



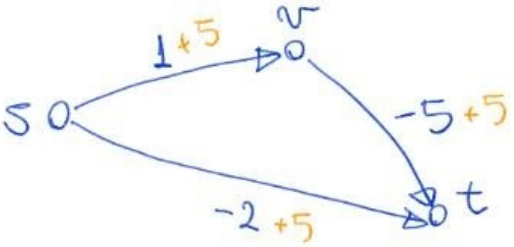
O algoritmo falha porque a escolha gulosa pode definir

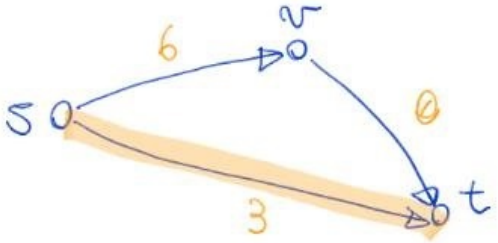
- um valor para a distância de um vértice,
  - sem considerar um caminho menor.

Isso ocorre quando tal caminho possui um custo maior na sua parte inicial,
    - que depois é reduzido por conta de arestas de custo negativo.
- No nosso exemplo, o caminho s → v → t, que tem custo -4,
    - nunca é considerado pelo algoritmo.



Poderíamos, ainda, pensar em reduzir o problema com arestas negativas
    - para o problema sem essas arestas.
- Uma tentativa seria somar o valor absoluto da aresta mais negativa
    - no comprimento de todas as arestas.
- Isso certamente faria com que o grafo não tivesse mais arestas negativas.





No entanto, o caminho mínimo entre os vértices pode ser alterado,

- pois caminhos com números diferentes de arestas
    - seriam afetados de modo distinto.

Como regra geral, quando tentamos eliminar custos negativos,

- se as soluções do seu problema tem número variado de objetos
    - (no caso de caminhos mínimos os objetos são as arestas)
- então somar um mesmo valor no custo de cada objeto
    - afetará mais o custo de soluções com maior cardinalidade,
        - e menos o custo daquelas com menor cardinalidade.
- Assim, não há garantia de preservar a ordem relativa das soluções.
    - Por isso, esse procedimento não é recomendado.

Por outro lado, se todas as soluções do seu problema tem a mesma cardinalidade,

- i.e., o mesmo número de objetos,
- então somar um mesmo valor no custo de cada objeto
    - afetará homogeneamente o custo de todas as soluções.
- Neste caso, como a ordem relativa dos custos das soluções é preservada,
    - o procedimento é seguro.
- Este é o caso, por exemplo, do problema da árvore geradora mínima,
    - um problema central em otimização combinatória e grafos
        - que veremos nas próximas aulas.

Prova de corretude:

O algoritmo de Dijkstra mantém as seguintes propriedades invariantes

- no início de cada iteração do laço principal do algoritmo:
    1. para todo vértice v em R, o valor dist[v] corresponde
        - ao custo do caminho mínimo de s até v.
    2. para todo vértice v em V o vértice pred[v] corresponde
        - ao penúltimo vértice em um menor caminho de s até v
            - cujos vértices intermediários estão em R.
    3. para todo vértice v em V \ R o valor dist[v] corresponde ao custo
        - do menor caminho cujos vértices intermediários estão em R.

Faremos a prova por indução no número de iterações k.

- H.I.: As propriedades 1, 2 e 3 do invariante valem no início da iteração k.

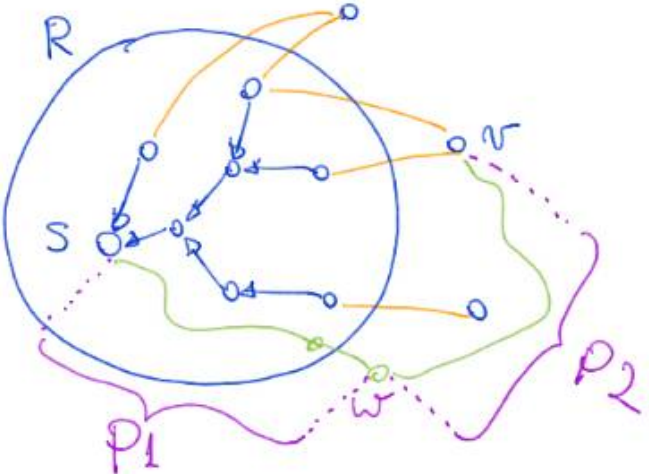
Caso base: no início da primeira iteração

- R é vazio, portanto as propriedades 1 e 2 valem trivialmente
- e a propriedade 3 vale porque todo vértice está em V \ R:
    - s é o único vértice com caminho sem vértices intermediários
        - e dist[s] = 0,
    - e os demais vértices não tem caminho sem vértices intermediários
        - e dist[ ] deles é +inf.

Passo: Seja k a iteração em que v é inserido em R. Vamos mostrar que

- as propriedades 1, 2 e 3 valem no início da iteração k + 1.

- O vértice v é inserido por ser o vértice fora de R com menor valor para dist[ ].
  - Pela propriedade 3 da H.I. temos que v é o vértice
    - com menor caminho cujos vértices intermediários estão em R.
- Vamos mostrar que este é um caminho mínimo de s até v.



Considere um caminho P qualquer de s até v e seja c(P) o custo de P.

- Em algum momento P tem que cruzar a fronteira entre
  - vértices que estão em R e vértices fora de R.
- Suponha que o primeiro vértice de P fora de R é w, e divida P em
  - P1 (parte que vai de s a w) e P2 (parte que vai de w a v).

- Pela propriedade 3 da H.I. temos que, dist[w] é o menor caminho de s até w
    - que só usa vértices em R. Portanto, c(P1) >= dist[w].
- Como não temos arcos de custo negativo, c(P2) >= 0.
- Assim, pela escolha de v como o vértice que minimiza dist[ ],
    - temos c(P) = c(P1) + c(P2) >= dist[w] + 0 >= dist[v].

Mostramos que qualquer caminho de s até v tem custo maior ou igual a dist[v].

- Portanto, a propriedade 1 do invariante vale no início da iteração k + 1.
    - Agora vamos mostrar que as propriedades 2 e 3 continuam valendo.
- Para os vértices que não são destino de uma aresta com origem em v
    - nada muda e o resultado segue da H.I..
- Vamos considerar um vértice w em V \ R tal que existe aresta (v, w).
    - Pela H.I., dist[w] e pred[w] tinham os valores corretos
        - considerando os vértices em R \ {v}.
- Assim, esses valores só devem ser alterados se existir
    - um caminho de custo menor para w, que passa por v.
- Mas, se for esse o caso, durante a iteração k
    - o algoritmo faz dist[w] ← dist[v] + c(v, w) e pred[w] ← v.
- Portanto, dist[w] corresponde ao custo do menor caminho
    - cujos vértices intermediários estão em R (prop. 3)
- e pred[w] aponta para o penúltimo vértice nesse caminho (prop. 2).

Implementação avançada de Dijkstra e eficiência

A eficiência do algoritmo de Dijkstra depende fortemente

- da estrutura de dados que usamos para implementar as operações
    - de escolha do vértice com menor valor de dist[ ].
- Como fazemos repetidas operações de remoção do mínimo de um conjunto,
    - a escolha natural é utilizar um heap de mínimo.

Pseudocódigo com heap:

```
DijkstraComHeap(grafo G=(V,E), custos c, vértice s):
        para todo v \in V faça dist[v] = +\inf e pred[v] = NULL
        dist[s] = 0
        H = constroiHeap(V, dist)
        enquanto H != { }:
                // escolha gulosa do algoritmo de Dijkstra
                v = removeMinHeap(H)
                para todo arco (v, w): // Quiz2: por que pude remover uma condição?
                        se dist[w] > dist[v] + c(v, w)
                                dist[w] = dist[v] + c(v, w)
                                pred[w] = v
                                atualizaHeap(H, w, dist[w])
```

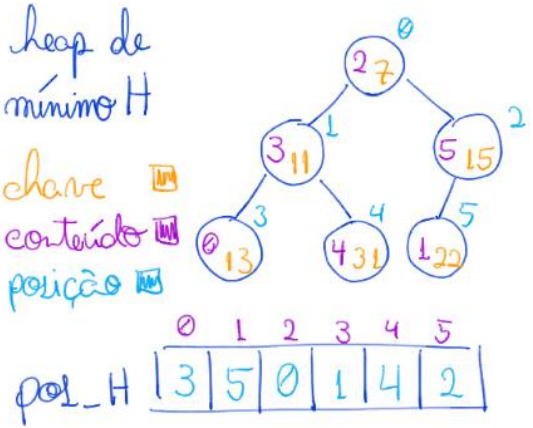
Eficiência: O((n + m) log n) = O(m log n) se o grafo for conexo,
    - pois nesse caso o número de arestas supera o número de vértices.
- Essa eficiência decorre de, em cada iteração do algoritmo,
    - um vértice ser removido do heap, o que leva tempo O(log n).
- Assim, ao longo de toda a execução as remoções levam tempo O(n log n).
- Além disso, cada arco (v, w) é considerado uma vez,
    - quando seu vértice origem v é removido do heap.
- No caso de (v, w) fazer parte de um caminho mais curto para w,
    - o valor dist[w] deve ser atualizado no heap, o que custa O(log n).
- No total, ao longo de toda a execução, as atualizações custam O(m log n).

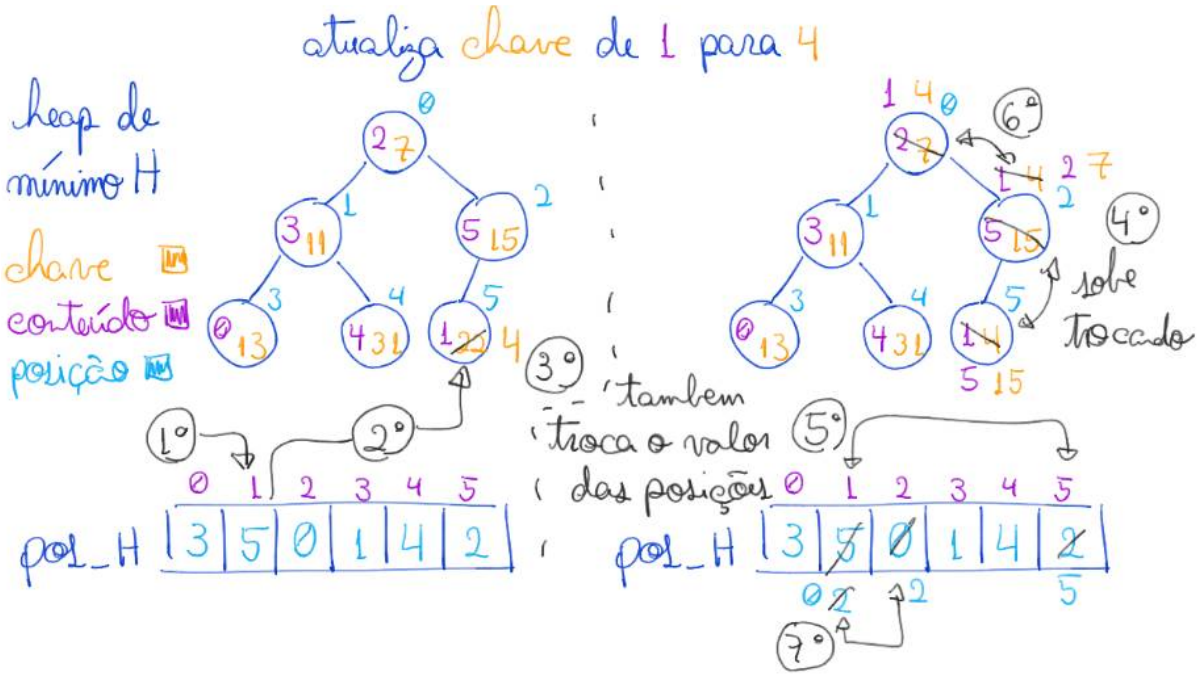
Para a maior parte dos grafos essa é a melhor versão do algoritmo de Dijkstra,
    - já que ela é quase linear no tamanho do grafo.
- A exceção são grafos particularmente densos, com m = O(n^2),
    - em que a complexidade do algoritmo é O(m log n) = O(n^2 log n).
- Surpreendentemente, nesse caso conseguimos melhorar a eficiência
    - usando nossa implementação básica,
- que usa um vetor de tamanho n para armazenar as informações dist[ ]
    - e tem eficiência O(n * n + m) = O(n^2).

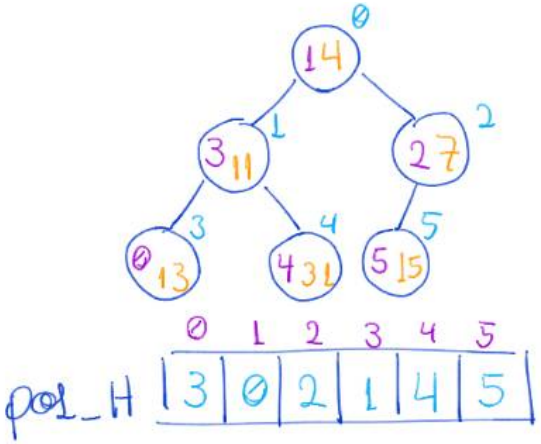
Sendo n o número de elementos armazenados, um heap de mínimo

- suporta as operações de remover o mínimo e de inserir em tempo O(log n).
    - Também conseguimos construir um heap em tempo O(n).
- Além disso, é possível atualizar o valor de elementos no meio do heap
    - em tempo O(log n), o que é particularmente relevante nesta aplicação.
- Como implementar essa atualização? Para implementar a função
    - atualizaHeap, é preciso modificar as funções sobeHeap e desceHeap.
- Isso porque, essas funções precisam manter atualizada,
    - num vetor auxiliar pos_H, a posição de cada elemento do heap H.

Exemplo de operações de um heap de mínimo, atualizando o vetor auxiliar.




atualiza chave de 1 para 4
heap de mínimo H
chave
conteúdo
posição
0 2 7
1 3 11
2 5 15
3 0 13
4 4 31
5 1 24
4
3°
1°
2°
pos_H
0 1 2 3 4 5
3 5 0 1 4 2
também troca o valor das posições
1 4 0
6°
1 4 2 7
4°
sobe trocado
5 15
5°
pos_H
3 5 0 1 4 2
0 2 5
7°



Curiosidade:

- É possível implementar o algoritmo de Dijkstra com heap
  - sem usar a operação de atualização.
    - Quiz4: Como implementar essa versão?
- Dica: Inserir um mesmo vértice v várias vezes no heap.
  - Mais especificamente, cada vez que a distância de v é atualizada.
- Note que, isso não compromete o correto funcionamento do algoritmo,
  - pois sairá primeiro do heap a cópia do vértice com menor distância.
- No entanto, devemos modificar o algoritmo para
  - descartar vértices repetidos.