Algoritmo de Contração Probabilística de Karger

Probabilidade Condicional

- Espaço Amostral U com todos os resultados possíveis das escolhas aleatórias

$\forall r \in U \ (Pr(r) \geq 0)$ e $\sum_{r \in U} Pr(r) = 1$

- Evento subconjunto $S \subseteq U$

$Pr(S) = \sum_{r \in S} Pr(r)$

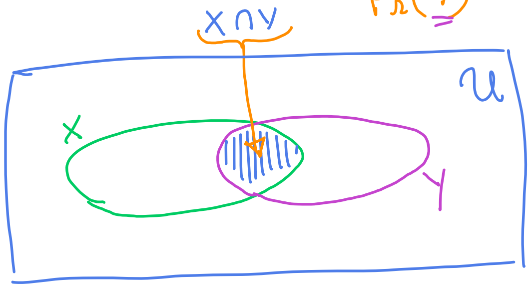
- Variável aleatória X é uma função $X: U \to \mathbb{R}$

- Esperança de X

$$E[X] = \sum_{r \in U} X(r) \cdot Pr(r)$$

- Dados eventos X e Y temos

$$Pr(X|Y) = \frac{Pr(X \cap Y)}{Pr(Y)}$$



- $\overbrace{Pr(X|Y)}^{X \text{ dado } Y}$ pode ser interpretada como a restrição/remapeamento/normalização do universo p/ os resultados que ocorrem em Y

- Quiz: Suponha que rolou dois dados e a soma dos resultados foi 7. Qual a probabilidade de um dos dados ter sido 1? $\to X$

$Y = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$

R: $Pr(X|Y) = \frac{Pr(X \cap Y)}{Pr(Y)} = \frac{2 \cdot 1/36}{6 \cdot 1/36} = 1/3$

(In)Dependência entre Eventos e Variáveis

- Def.: eventos X e Y são independentes se, e somente se, $\underbrace{Pr(X \cap Y) = Pr(X).Pr(Y)}$

- Equivalências:

$$\boxed{Pr(X|Y) = \frac{Pr(X \cap Y)}{Pr(Y)} = \frac{Pr(X).\cancel{Pr(Y)}}{\cancel{Pr(Y)}} = Pr(X)}$$

$$\boxed{Pr(Y|X) = Pr(Y)}$$

- Def.: variáveis A e B (definidas sobre U) são independentes sse $\forall (a,b) \in U \left(Pr(A=a \wedge B=b) = Pr(A=a).Pr(B=b) \right)$

Produto das esperanças:

se A e B são variáveis independentes, então $E[A.B] = E[A].E[B]$

Prova: $E[A.B] = \sum_{a,b} (a.b).Pr(A=a \wedge B=b)$ → A e B são variáveis independentes

$= \sum_a a\,Pr(A=a) \left(\sum_b b.Pr(B=b) \right) = E[A]E[B]$

Exemplo: X_1 e $X_2 \in \{0,1\}$ c/ prob. uniforme e $X_3 = X_1 \oplus X_2$

$U = \{(0,0,0),(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0)\}$

Quiz 1: X_1 e X_3 são independentes?

R: Sim, $Pr(X_i = 1) = 1/2$ e $Pr(X_3 = 1 | X_1 = 1) = 1/2$ e $Pr(X_3 = 1 | X_1 = 0) = 1/2$

Quiz 2: $X_1 X_3$ e X_2 são independentes? R.: Não

$$\boxed{E[(X_1.X_3).X_2] = \sum (n_1.n_2.n_3).Pr(X_1 = n_1 \wedge X_2 = n_2 \wedge X_3 = n_3) = 0}$$

$\neq$

$$\boxed{E[X_1.X_3].E[X_2] = E[X_1]E[X_3]E[X_2] = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{8}}$$

prod. esp. var. ind

Problema do Corte Mínimo

Entrada: um grafo não-orientado $G = (V, E)$

Solução: um corte $S \subset V$: $|\delta(S)|$ é mínima, i.e., o # de arestas atravessando a fronteira de S é $\leq |\delta(S')|$ p/ qualquer S' c/ $\emptyset \neq S' \subset V$

lembrando que um corte é um subconjunto de V: $\emptyset \neq S \neq V$

de arestas atravessando a fronteira de S

Algoritmo de Contração Probabilística de Karger

enquanto # de vértices > 2:

- escolha uma aresta $e = \{u, v\}$ c/ prob. uniforme
- contraia os vértices u e v, mantendo arestas múltiplas, mas removendo auto-laços que surjam

devolva o corte S correspondente a um dos vértices restantes

- Quiz: consegue generalizar esse alg. p/ lidar c/ pesos nas arestas?

Obs: Sempre existe corte mínimo que induz subgrafo conexo. Quiz: Porque?

R.: Por absurdo, suponha um corte mínimo desconexo c/ partes S e S' : $\nexists (u,v) \in E$: $u \in S$ e $v \in S'$

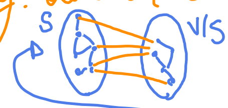
Assim $|\delta(S \cup S')| = |\delta(S')| + |\delta(S)| \Rightarrow |\delta(S)| \leq |\delta(S \cup S')|$ e $|\delta(S')| \leq |\delta(S \cup S')|$ pois $|\delta(S)| \geq 0 \ \forall S \subset V$

Análise probabilística de uma execução/iteração do algoritmo de Karger

- Qual a probabilidade de sucesso?

$\emptyset$ ou $V \setminus S$

- Seja $S \subset V$ um corte mínimo. Vamos calcular a prob. do alg. devolver S



- $Pr(\text{Sucesso}) \geq Pr(\text{devolver } S) = 1 - Pr(\text{não devolver } S)$

Explicar c/ figura

- O alg. não devolve S apenas se em alg. iter. contrair uma aresta de $\delta(S)$
- $X_j \in \{0, 1\}$ é a variável aleatória que indica se uma aresta de $\delta(S)$ foi contraída na iter. j, p/ $j = 1$ até $n-2$ (quando sobram apenas 2 supervértices)
- $Pr(\text{devolver } S) = Pr(\sim X_1 \wedge \sim X_2 \wedge \sim X_3 \wedge \dots \wedge \sim X_{n-2})$ c/ $Pr(\sim X_j) = 1 - Pr(X_j)$
- $Pr(X_1) = |\delta(S)|/m$, c/ $\left[2m = \sum_{v \in V} |\delta(v)|\right]$ ⊛1 e $|\delta(S)| \leq |\delta(v)| \; \forall v \in V \Rightarrow 2m \geq n.|\delta(S)|$

$\leq |\cancel{\delta(S)}|/n.|\cancel{\delta(S)}|/2 = 2/n \Rightarrow P(\sim X_1) \geq 1 - 2/n = \frac{n-2}{n}$

o grau de cada supervértice é $\geq |\delta(S)|$

⊛ Fazer p/ X_2 antes de generalizar p/ X_j

- $Pr(X_j \mid \sim X_1 \wedge \dots \wedge \sim X_{j-1}) = |\delta(S)| / \#\text{arestas} \leq 2|\cancel{\delta(S)}| / (n-j+1)|\cancel{\delta(S)}| = 2/(n-j+1)$

$$\boxed{Pr(\sim X_j \mid \sim X_1 \wedge \dots \wedge \sim X_{j-1})} = 1 - Pr(X_j \mid \sim X_1 \wedge \dots \wedge \sim X_{j-1}) \geq 1 - \frac{2}{n-j+1} = \boxed{\frac{n-j-1}{n-j+1}}$$

⊛1 cada aresta aumenta em 1 o grau de 2 vértices

Uso de repetições com escolhas aleatórias independentes

- para obter alta probabilidade de sucesso

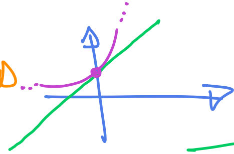
deixar escrito p/ o extra

$$\boxed{Pr(\text{devolve } S)} = Pr(\sim X_1) \cdot Pr(\sim X_2 \mid \sim X_1) \cdot Pr(\sim X_3 \mid \sim X_1 \wedge \sim X_2) \cdots Pr(\sim X_{n-2} \mid \sim X_1 \wedge \ldots \wedge \sim X_{n-3})$$

$$\geq \frac{\cancel{n-2}}{n} \cdot \frac{\cancel{n-3}}{n-1} \cdot \frac{\cancel{n-4}}{\cancel{n-2}} \cdot \frac{\cancel{n-5}}{\cancel{n-3}} \cdots \frac{2}{\cancel{4}} \cdot \frac{1}{\cancel{3}} = \boxed{\frac{2}{n(n-1)}} \geq \frac{1}{n^2}$$

prob. pequena p/ n grande, mas muito maior que $1/(2^n - 2)$

De cálculo: $(1+x) \leq e^x \Rightarrow$



$$\Rightarrow Pr(\text{falha}) \leq 1 - Pr(\text{devolve } S) \leq \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \leq e^{-1/n^2}$$

Fazendo N repetições independentes e guardando o melhor corte

$$Pr(\text{falha } N \text{ vezes}) = Pr(\text{falha})^N \leq e^{-N/n^2} = \frac{1}{e^{N/n^2}}$$

p/ $N = n^2$ temos $\leq 1/e^{n^2/n^2} = 1/e$

p/ $N = n^2 \ln n \quad \leq 1/e^{\frac{n^2 \ln n}{n^2}} = 1/e^{\ln n} = 1/n$

p/ $N = n^2 \cdot 2 \ln n \quad \leq 1/e^{\frac{n^2 \cdot 2 \ln n}{n^2}} = 1/e^{2 \ln n} = 1/n^2$

c/ $> n^2 \ln n$ repetições a prob. de falha tende a 0 muito rápido

Extra: qual o número máximo de cortes mínimos que um grafo pode ter?

Seja t o # de cortes mínimos de um grafo G c/ n vértices

chamamos de S_i, $i = 1, \dots, t$, cada corte mínimo

Nossa análise mostrou que $Pr(\text{alg. devolver } S_i) \geq \frac{2}{n(n-1)}$

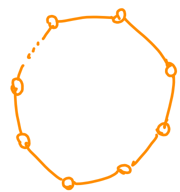
$\forall i$ temos S_i são eventos disjuntos $\Rightarrow Pr\left(\bigcup_{i=1}^{t} \text{alg. dev. } S_i\right) = \sum_{i=1}^{t} Pr(\text{alg. dev. } S_i)$

$$\sum_{i=1}^{t} Pr(\text{alg. devolver } S_i) \leq \text{Prob. do alg. devolver qualquer corte} = 1$$

de cortes mínimos

$$1 \geq \sum_{i=1}^{t} Pr(\text{alg. dev. } S_i) \geq \sum_{i=1}^{t} \frac{2}{n(n-1)} = t \cdot \frac{2}{n(n-1)} \Leftrightarrow t \leq \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$$

Esse caso máximo ocorre em ciclos, pois todo par de arestas corresponde à fronteira de um corte mínimo



em um ciclo c/ n vértices temos n arestas