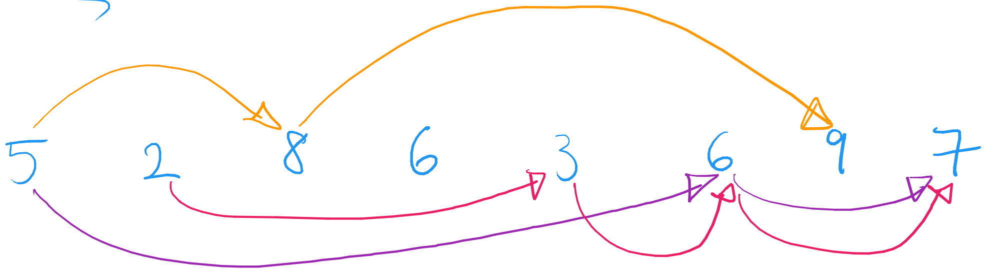
Programação Dinâmica

- Entender problema
- Imaginar sol. ótima
- Mostrar subestrutura ótima
- Deduzir recorrência
- Projetar alg. c/ tabela
- Analisar efic. de tempo e espaço

Subsequência Crescente Mais Longa

- Entrada: sequência de números $v[1..n]$
- Solução: maior subsequência $v[i_1], v[i_2], \ldots, v[i_k]$ da entrada, tal que $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$ e p/ todo i_l e i_h c/ $l < h$ temos $v[i_l] < v[i_h]$

Exemplos



Importante: encontrar uma ordenação p/ os subproblemas e uma forma de resolver um subproblema usando subproblemas menores, i.e., que vem antes na ordenação.

Imaginar solução ótima

- pensando em uma sequência que termina na posição j

$$v = \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \end{array}$$
$$v = [\,5 \quad 2 \quad 8 \quad 6 \quad 3 \quad 6 \quad 9 \quad 7\,]$$

$j = 8 \Rightarrow L[8] = 1 + L[6]$ neste exemplo

Ou seja, a solução ótima que termina na posição j tem valor $1 +$ o valor da maior subsequência (sol. ótima) que termina em i antes de j c/ $v[i] < v[j]$

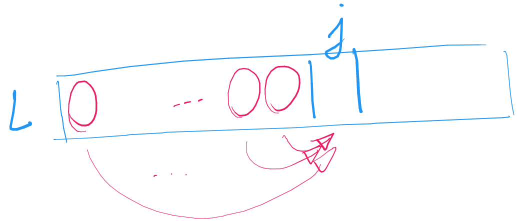
Subestrutura Ótima

- provar por contradição, supondo que uma solução ótima p/ L[j] não usa a sol. ótima de seu subproblema L[i]

Deduzir Recorrência

caso base

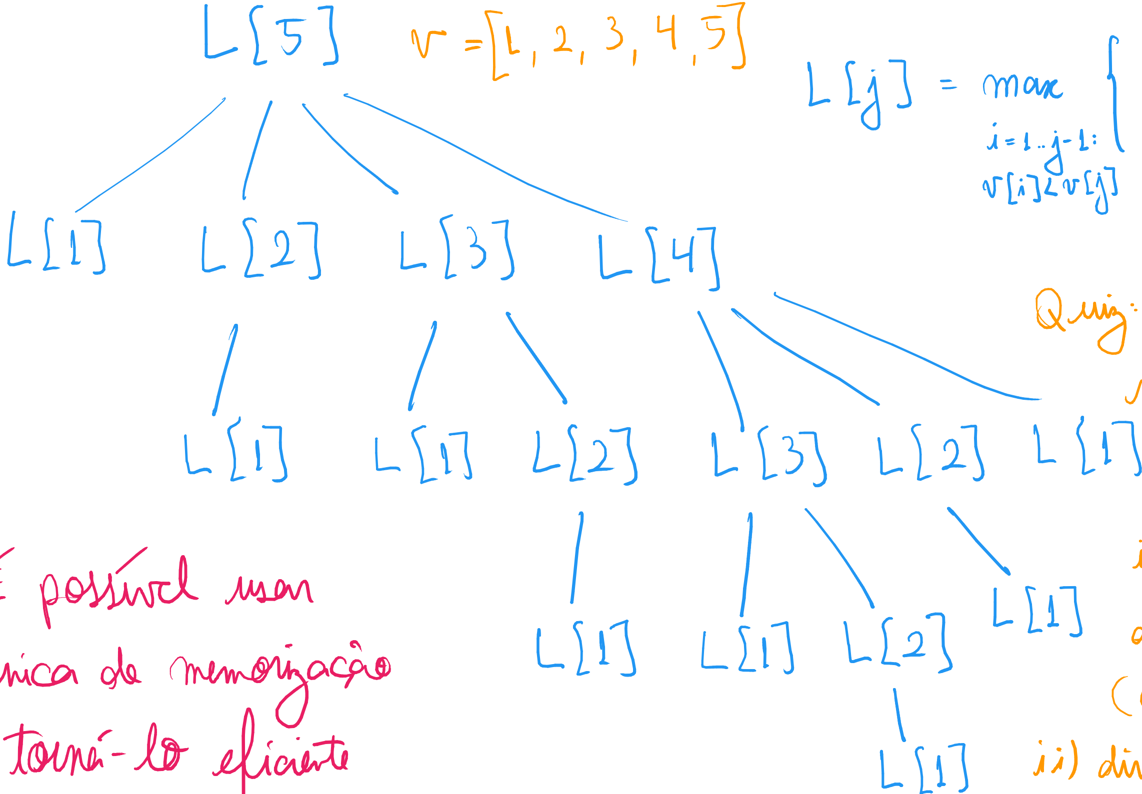
$$L[j] = \max_{\substack{i=1..j-1: \\ v[i]<v[j]}} \{ 1 + L[i],\ 1 \}$$



$$\text{alternativa} = 1 + \max_{\substack{i=1..j-1: \\ v[i]<v[j]}} \{ L[i] \}$$

Alg. Puramente recursivo é ineficiente

$v = [1, 2, 3, 4, 5]$



$$L[j] = \max_{\substack{i=1..j-1:\\ v[i]<v[j]}} \{1 + L[i], 1\}$$

Quiz: por que os algs. recursivos de D&C são eficientes?

i) subproblemas diminuem rápido (divisão ⇒ alt. log.)

ii) divisão gera subprob. disjuntos

⊗ É possível usar técnica de memorização p/ torná-lo eficiente

Alg. iter. c/ tabela

$$L[j] = \max_{\substack{i=1..j-1:\\ v[i]<v[j]}} \{1 + L[i], 1\}$$

subSeqCrescMaisLonga$(v[1..n])$:

para $j = 1$ até n: — $O(n)$ iter.

  $L[j] = 1$ → pred$[j] = -1$

  para $i = 1$ até $j-1$: — $O(n)$ iter.

    se $L[i] \geq L[j]$ E $v[i] < v[j]$:

      $L[j] = 1 + L[i]$ → pred$[j] = i$

devolva $\max\limits_{j=1..n} \{L[j]\}$

Quiz: por que inclui o igual?

Efic. tempo: $O(n^2)$

Efic. espaço: $\Theta(n)$

⊛ Para reconstruir a seq, guardar pred[ ] de cada j

Curiosidade / Extra:

- É possível fazer um alg. mais efic. que mantém a melhor solução terminada em cada valor antes de j em uma árvore binária de busca balanceada.
- A chave é o último valor da subseq. crescente e o tam. da mesma também é armazenado.
- Assim, a busca pela melhor subseq. que concatenar c/ v[j] leva tempo $\Theta(\log n)$ → busca o antecessor de v[j] e a atualização das seq. armazenadas busca v[j] ou seu sucessor.
- Só mantemos armazenadas as subseq. não dominadas, i.e., que tem final menor ou tam. maior que as demais subseq.