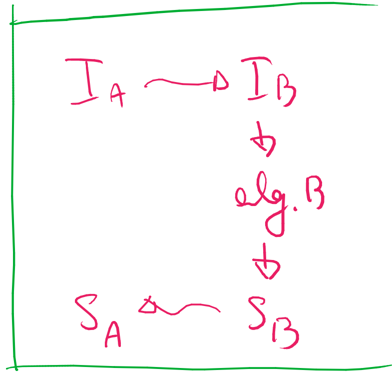
Identificando Problemas NP-Difíceis

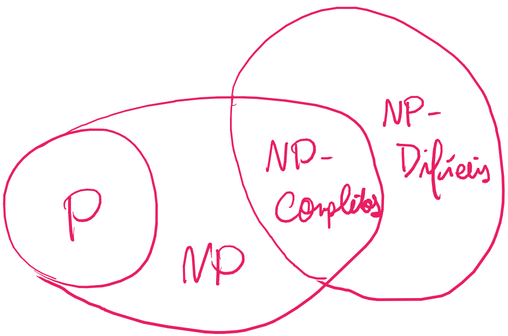
- Alg. eficiente: complexidade no pior caso $O(n^k)$ → constante ↳ tam. da entrada
- Prob. de decisão: prob. c/ resposta SIM ou NÃO
- Conjectura de Edmonds (1965): não existe alg. efic. p/ o TSP
- Classe P: prob. de decisão c/ alg. eficiente
- Classe NP: prob. de decisão cuja sol. SIM pode ser verificada em tempo polinomial

- Redução de A para B: podemos usar um alg. p/ B para resolver A, i.e., B é ao menos tão difícil quanto A

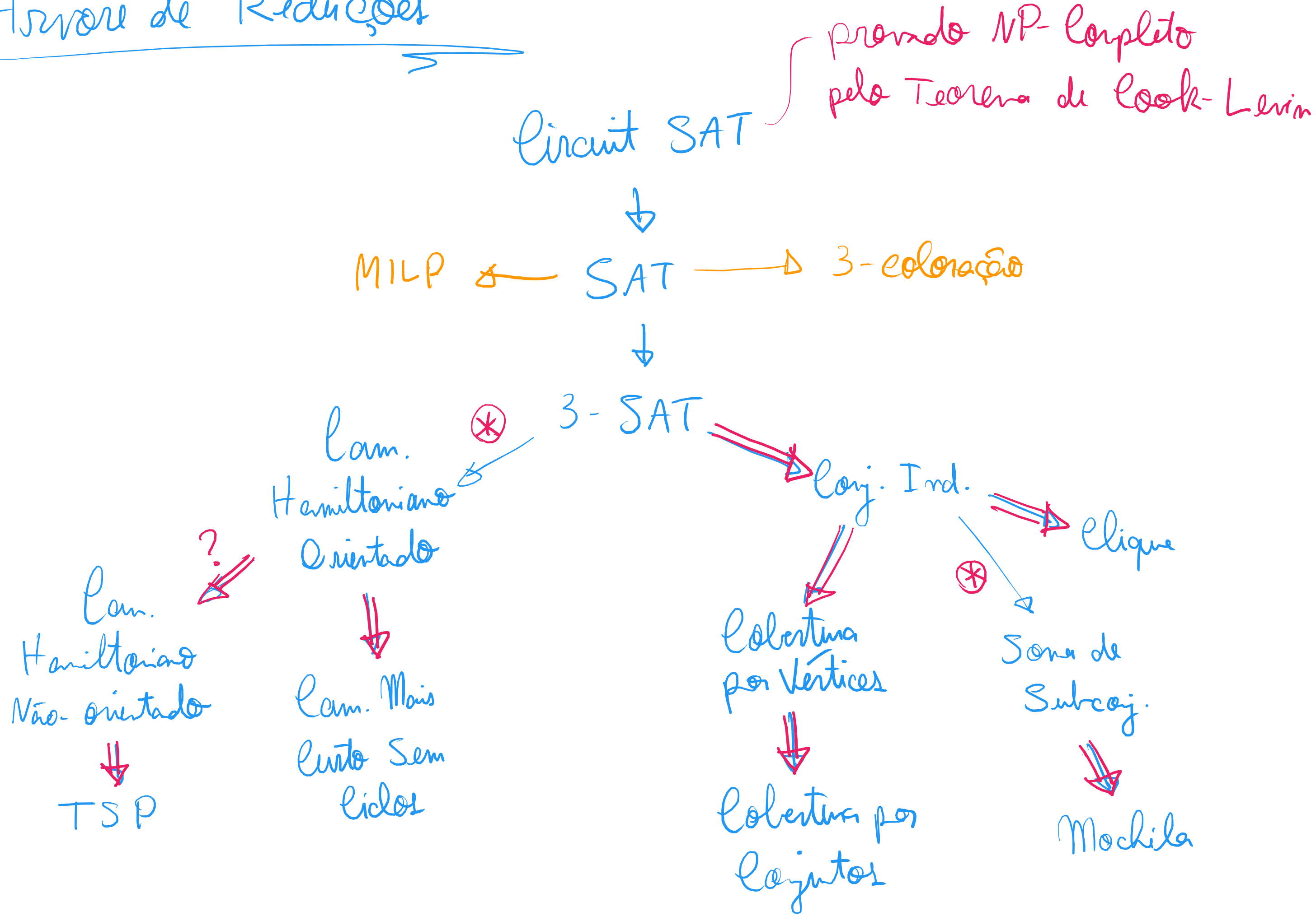


- Classe NP-Completo: problema Q em NP t.q. todo problema em NP é redutível a Q

- Classe NP-Difícil: problema Q t.q. todo problema em NP é redutível a Q



Árvore de Reduções



Pontos Chave nas Reduções de A p/ B?

- O que mapeia com que?
- Sol. de A é SIM $\Longleftrightarrow$ Sol. de B é SIM

i.e., se I_A tem resp. SIM então I_B tem resp. SIM
e se I_A tem resp. NÃO então I_B tem resp NÃO

$$\begin{tikzcd} I_A \arrow[r] & I_B \arrow[d] \\ & \text{alg. B} \arrow[d] \\ S_A & S_B \arrow[l] \end{tikzcd}$$

- Ida: Dada Sol. de A mostrar Sol. de B
- Volta: Dada Sol. de B mostrar Sol. de A

↳ Equivale à contrapositiva: Se I_A não tem Sol. então I_B não tem Sol

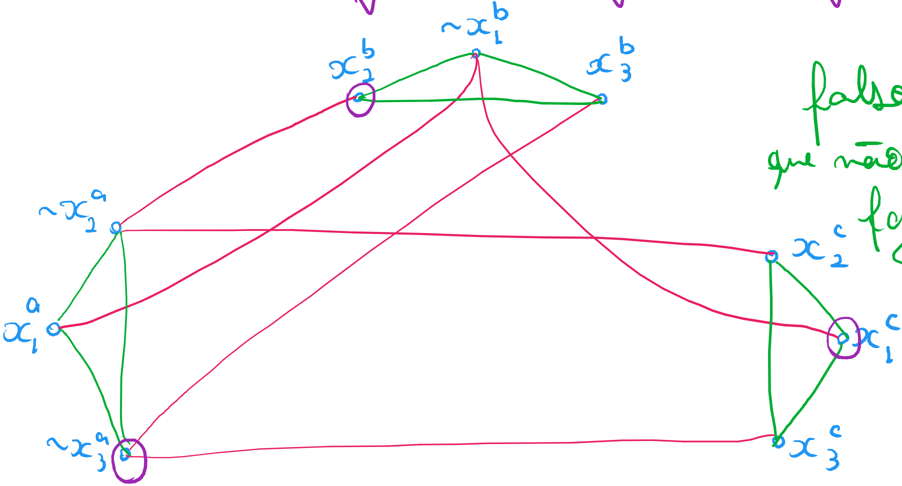
☒ Colocar um exemplo c/ resposta SIM e outro c/ resposta NÃO para evidenciar a importância dos dois sentidos da prova

Redução de 3-SAT p/ Conj. Ind.

- Dica: cada cláusula (com 3-literais) vira uma clique c/ 3 vértices
  ↳ porque?

- Como os vértices são conectados?
  i) arestas entre cláusulas impedem pegar versões opostas de um literal
  ii) arestas intra cláusulas evitam falso positivo, i.e., conj. ind. c/ K vértices que não satisfaz todas as cláusulas

Ex) $(\overbrace{x_1 \vee \sim x_2 \vee \sim x_3}^{a}) \wedge (\overbrace{\sim x_1 \vee x_2 \vee x_3}^{b}) \wedge (\overbrace{x_1 \vee x_2 \vee x_3}^{c})$

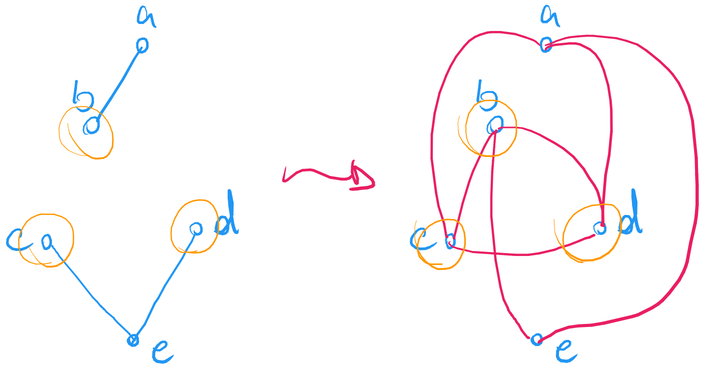


Mostrar que SAT c/ K cláusulas é satisfatível $\Leftrightarrow$ existe conj. ind. c/ tam. K

Redução Conj. Ind. p/ Clique

- Dica: pensar no complemento do grafo

Ex.)



$G = (V, E)$ $\qquad$ $\bar{G} = (V, \bar{E})$

Tome $S \subseteq V$ e considere as seguintes equivalências:

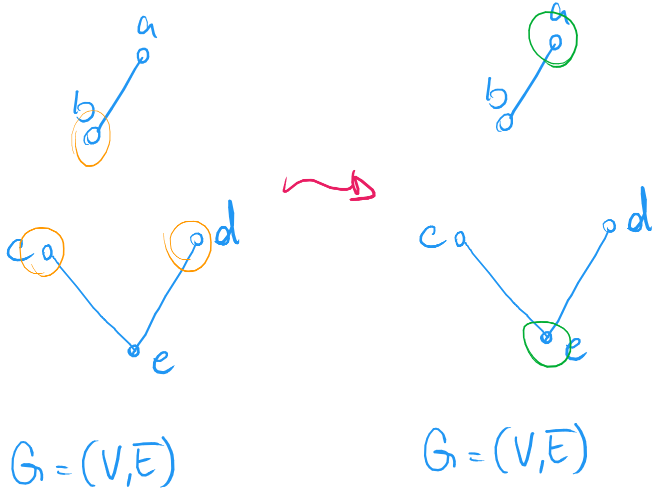
S é ind. em $G=(V,E) \iff \forall u,v \in S$ temos $\{u,v\} \notin E \iff \forall u,v \in S$ temos $\{u,v\} \in \bar{E} \iff S$ é clique em $\bar{G}=(V,\bar{E})$

Mostrar que G tem conj. ind. de tam. $K \iff \bar{G}$ tem clique de tam. K

Redução Conj. Ind p/ Cobertura por Vértices

- Dica: pensar no complemento do valor alvo

Ex.)



Tome $S \subseteq V$ e considere as seguintes equivalências:

S é ind. em $G=(V,E) \iff \forall\, u,v \in S$ temos $\{u,v\} \notin E \iff$ $\forall \{u,v\} \in E$ temos $u \notin S$ ou $v \notin S$, i.e., toda aresta tem ao menos uma ponta fora de $S \iff V \setminus S$ é uma cobertura por vértices

Mostrar que G tem conj. ind. de tam. k $\iff$ G tem cobertura por vértices de tam. $n-k$

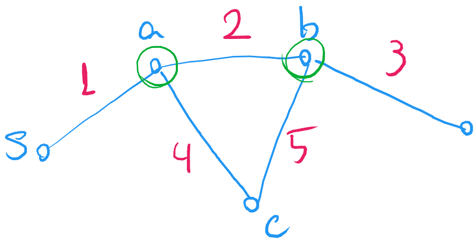
Redução da cobertura por vértices p/ cobertura por cojuntos

Dica: aresta vira elemento, vértice vira cojunto

→ usamos vértices para cobrir arestas

usamos cojuntos p/ cobrir elementos (números inteiros)

Ex.)



→

coj. universo $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$S = \{1\}$, $a = \{1, 2, 4\}$, $b = \{2, 3, 5\}$,

$c = \{4, 5\}$, $t = \{3\}$

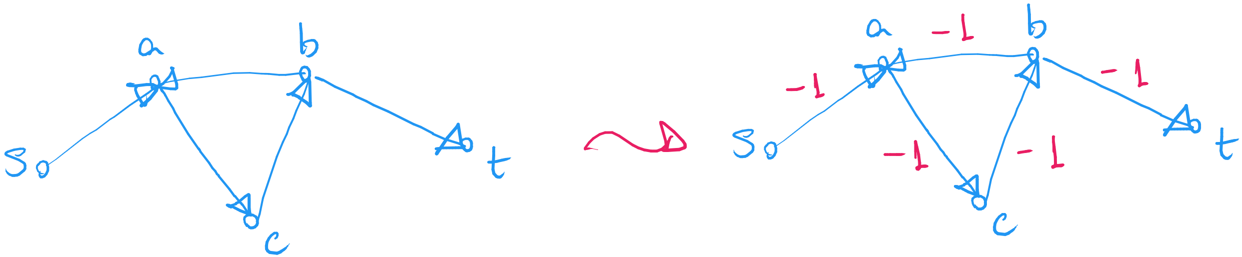
Q.1) Qual o # de elementos no subcoj. de cada vértice? R.: o grau do vértice

Q.2) Qual o # de vezes que cada elemento aparece em coj. diferentes? R: 2

Por que? R.: Pois cada aresta tem duas pontas.

Redução Cam. Hamiltoniano Orientado p/:

- Caminho Mais Curto Sem Ciclos (na solução)
  - Dica: usar valores negativos

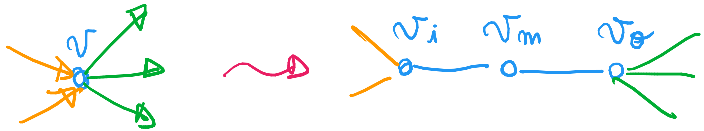


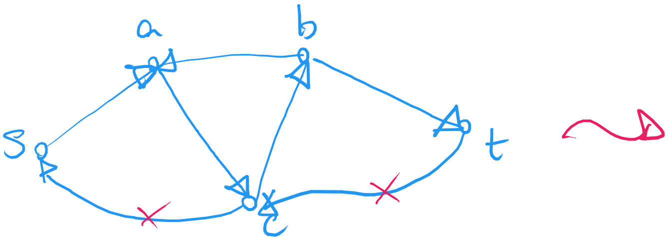
Quiz: O que o alg. de Bellman-Ford faz no grafo ponderado anterior? R.: acusa ciclo negativo

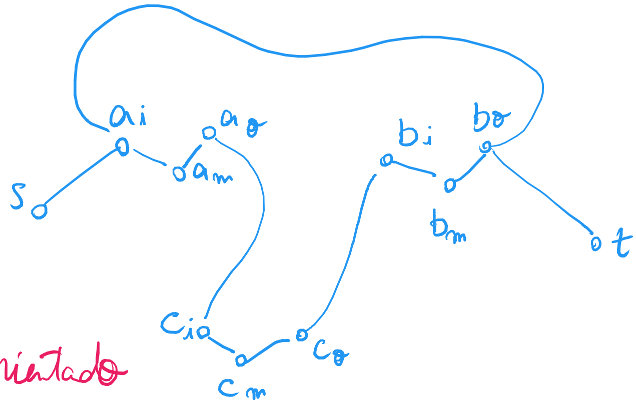
Mostrar que tem (s,t)-cam. Hamiltoniano $\Longleftrightarrow$ tem (s,t)-cam. mínimo c/ custo n-1 (passou por todo vértice)

Redução Cam. Hamiltoniano Orientado p/ :

- Cam. Hamiltoniano não Orientado
  - Dica: gadget p/ não conseguir entrar e sair usando apenas arcos de entrada (ou de saída) + remova arcos incidentes na origem e excedentes no destino





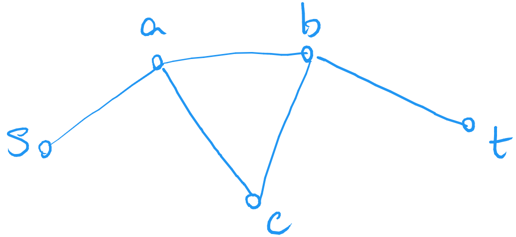


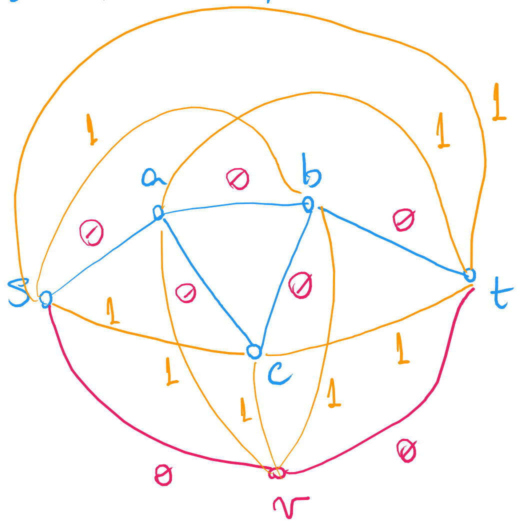
Quiz: Por que um circuito Hamiltoniano ñ-orientado nunca vai usar uma aresta no sentido inverso do arco original correspondente?

Redução Cam. Hamiltoniano não-orientado p/ TSP

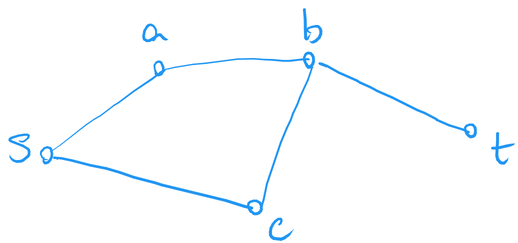
- Dica: usar custos 0 e 1
- Como lidar c/ vértices origem e destino (s,t)?

Ex. 1.)





Ex. 2.)



Mostrar que tem (s,t)-cam. Hamiltoniano $\iff$ tem circuito do TSP c/ custo 0

Redução da Soma de Subconj. p/ Mochila

- Dica: na Soma de Subconj. queremos um valor exato
  - Como mapear os elementos p/ que a restrição e a função objetivo da mochila garantam tal valor?

Redução de Otimização p/ Decisão (e vice-versa)

- Decisão p/ Otimização é simples. Como fazer?
- Otimização p/ Decisão usando busca binária: (supondo prob. de max.)
  - escolha k alvo arbitrário e rode alg. p/ versão de decisão
  - se resposta for SIM, dobre k e repita
  - se resposta for NÃO, divida k por 2 e repita
  - depois que encontrar um limitante superior e um inferior
    - faça busca binária pelo k ótimo rodando o alg. de decisão a cada iteração

Ex.) Descobrir o menor raio p/ K antenas cobrirem n localidades em uma reta

Tome $K = 2$ e as seguintes localidades