

Ordenação por intercalação (mergesort)

O problema da ordenação

Definição de ordenação (crescente)

- Um vetor $v[0 \dots n-1]$ está ordenado se $v[0] \leq v[1] \leq v[2] \leq \dots \leq v[n-1]$

Definindo o problema da ordenação:

- Dado um vetor v de tamanho n ,
 - permutar os elementos de v até ele ficar ordenado.

Exemplo:

- Entrada

77	55	11	44	33	22	88	66
---------------	---------------	---------------	---------------	---------------	---------------	---------------	---------------

- Saída

11	22	33	44	55	66	77	88
----	----	----	----	----	----	----	----

Relembrando

Vimos algoritmos iterativos simples com tempo $O(n^2)$ no pior caso:

- insertionSort, 
- selectionSort, 
- bubbleSort, 

Também vimos o heapSort, que usa a estrutura de dados Heap

- para melhorar o selectionSort e atingir tempo $O(n \log n)$.

Na aula de hoje

Veremos três tópicos extremamente importantes:

- Técnica de projeto de algoritmos divisão-e-conquista.
 - Permite obter algoritmos nada óbvios e muito eficientes.
- Algoritmo de ordenação mergeSort,
 - clássico e ainda relevante.
- Árvore de recursão para analisar eficiência de algoritmo recursivo.
 - Pode ser generalizada no Teorema Mestre.

Projeto de algoritmos por divisão e conquista

- **Dividir**: o problema é dividido em subproblemas menores do mesmo tipo.
- **Conquistar**: os subproblemas são resolvidos recursivamente, sendo que os subproblemas pequenos são caso base.
- **Combinar**: as soluções dos subproblemas são combinadas numa solução do problema original.

Ideia do mergesort

- **Dividir** o vetor a ser ordenado em dois subvetores,
 - cada um com metade do tamanho original.
- **Ordenar** cada subvetor recursivamente,
 - sendo que subvetores com 0 ou 1 elementos já estão ordenados.
- Intercalar (**merge**) os subvetores ordenados resultantes.

Exemplo:

77	55	11	44	33	22	88	66
----	----	----	----	----	----	----	----

- Dividir em dois subvetores.

77	55	11	44	33	22	88	66
----	----	----	----	----	----	----	----

- Conquistar recursivamente (lembrar dos casos base).

11	44	55	77	22	33	66	88
----	----	----	----	----	----	----	----

- Combinar por intercalação (merge).

11	22	33	44	55	66	77	88
----	----	----	----	----	----	----	----

Algoritmo mergeSort recursivo

// ordena o vetor $v[p \dots r-1]$

```
void mergeSortR(int v[], int p, int r) {
```

```
    int m;
```

```
    if (r - p > 1) { // se subvetor corrente tem mais de 1 elemento
```

```
        m = (p + r) / 2; //  $m = p + (r - p) / 2$ 
```

```
        mergeSortR(v, p, m);
```

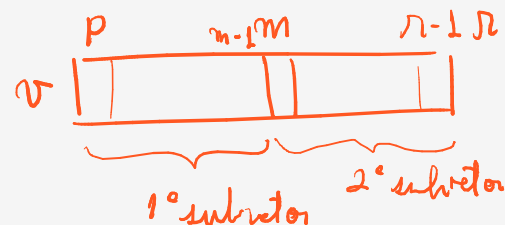
```
        mergeSortR(v, m, r);
```

```
        intercala1(v, p, m, r);
```

```
    }
```

```
}
```

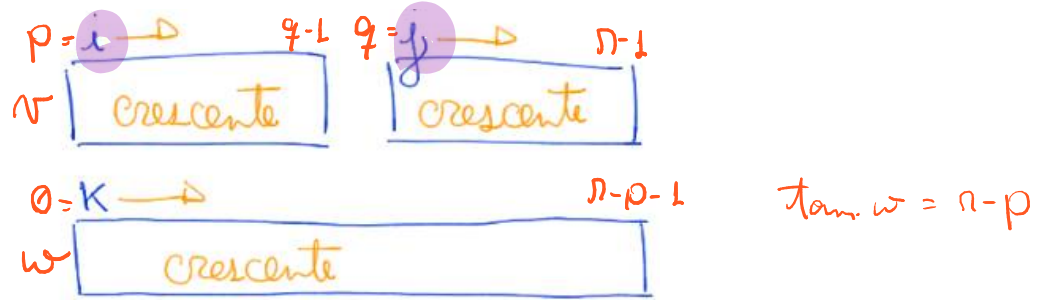
$$m = \frac{p+r}{2} = \left(p - \frac{p}{2} \right) + \frac{r}{2} = p + \frac{(r-p)}{2}$$



- A questão central é
 - como fazer a intercalação (merge) com eficiência linear?
- Note que, se intercala levar tempo $O(n^2)$, não há esperança
 - desse algoritmo ser mais eficiente que os algoritmos elementares.

Problema da intercalação

- Dados $v[p \dots q-1]$ e $v[q \dots r-1]$ ordenados, obter $v[p \dots r-1]$ ordenado.

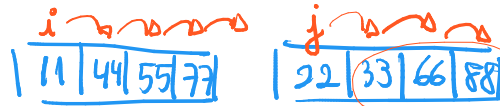


Ideia: percorrer cada subvetor, colocando no vetor auxiliar

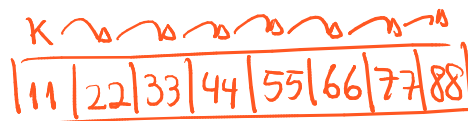
- o menor dentre os elementos correntes de cada subvetor.

Exemplo:

- Vetor v



- Vetor w



Algoritmo de intercalação de subvetores ordenados

```
// primeiro subvetor em  $v[p \dots q-1]$ , segundo subvetor em  $v[q \dots r-1]$ 
void intercala1(int v[], int p, int q, int r) {
    int i, j, k, tam;
    i = p; j = q; k = 0; tam = r - p;
    int *w = malloc(tam * sizeof(int));
    while (i < q && j < r) { // não chegou a fim de nenhum subvetor
        if (v[i] <= v[j]) w[k++] = v[i++]; // cópia do 1º subvetor
        else /* v[i] > v[j] */ w[k++] = v[j++]; // cópia do 2º subvetor
    }
    while (i < q) w[k++] = v[i++];
    while (j < r) w[k++] = v[j++];
    for (k = 0; k < tam; k++) {
        v[p + k] = w[k];
    }
    free(w);
}
```

Invariantes e corretude do intercala1: no início de cada iteração temos

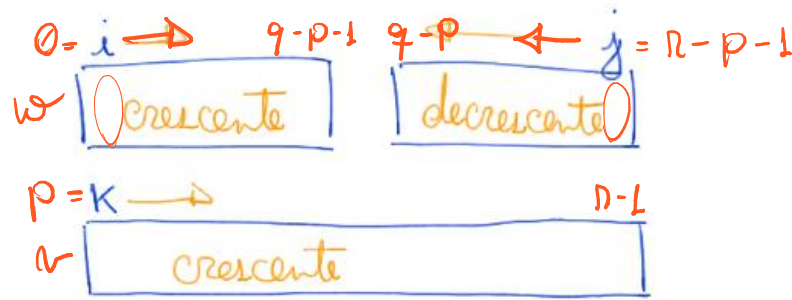
- $w[0 \dots k-1]$ contém os elementos de $v[p \dots i-1]$ e $v[q \dots j-1]$,
- $w[0 \dots k-1]$ está ordenado,
- $w[0 \dots k-1] \leq v[i \dots q-1]$,
- $w[0 \dots k-1] \leq v[j \dots r-1]$.

Eficiência de tempo do intercala:

- O número de operações é linear no tamanho do subvetor sendo intercalado,
 - ou seja, $O(r - p) = O(\text{tam})$
- Para verificar isso, note que em cada iteração, de qualquer laço,
 - i ou j aumenta de 1.
- Como i começa em p e termina em q e j começa em q e termina em r,
 - temos $(q - p) + (r - q) = q - p + r - q = r - p = \text{tam}$

Curiosidade:

- Sedgewick propõe uma versão interessante do algoritmo de intercalação,
 - chamado **intercalação com sentinelas**.



// primeiro subvetor em $v[p \dots q-1]$, segundo subvetor em $v[q \dots r-1]$

void **intercala2**(int v[], int p, int q, int r) {

int i, j, k, *w;

w = malloc((r - p) * sizeof(int));

for (i = p; i < q; ++i)

w[i - p] = v[i];

for (j = q; j < r; ++j)

w[(r - p - 1) - (j - q)] = v[j];

i = 0;

j = r - p - 1;

for (k = p; k < r; ++k)

if (w[i] <= w[j])

v[k] = w[i++];

else

v[k] = w[j--];

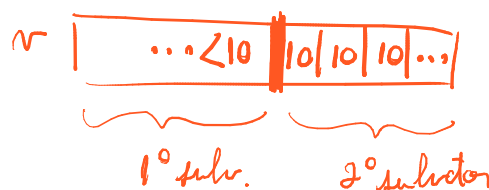
free(w);

}

cópia
do 1º subvetor
cópia
do 2º subvetor
invertido

cópia de
volta p/
r em ordem

- Você consegue entender por que a função anterior funciona?
 - Por que ela não precisa de laços para copiar as sobras do primeiro ou segundo subvetor?
- Quais os invariantes do seu laço principal?
- Ela é estável? I.e., elementos iguais tem sua ordem relativa preservada?
 - Considere o caso em que existe repetição do maior elemento
 - e essas repetições estão no final do 2º subvetor.



Relembrando o código do mergeSort recursivo:

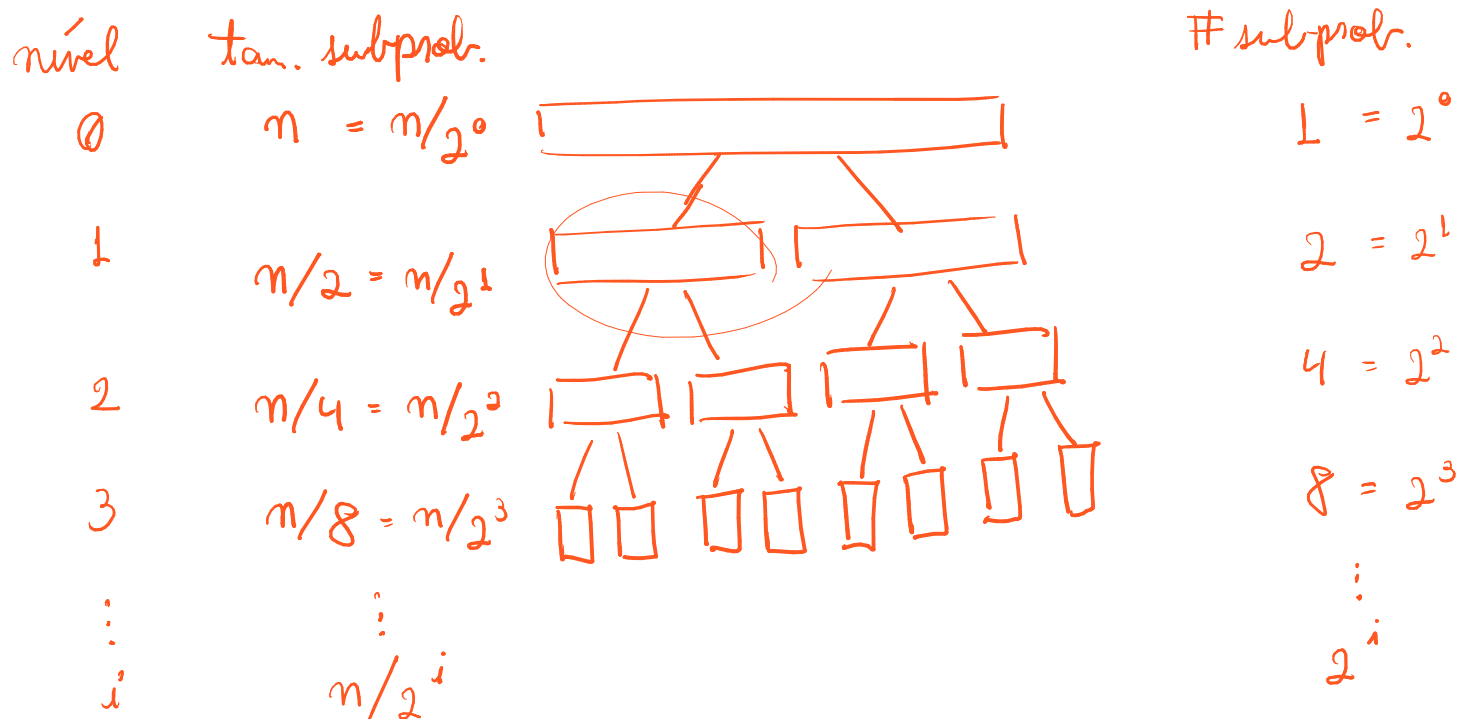
```
// ordena o vetor v[p .. r-1]
void mergeSortR(int v[], int p, int r) {
    int m;
    if (r - p > 1) {
        m = (p + r) / 2; // m = p + (r - p) / 2;
        mergeSortR(v, p, m); - 1º
        mergeSortR(v, m, r); - 2º
        intercala1(v, p, m, r);
    }
}
```

Corretude do mergeSort (por indução matemática):

- Pelo caso base $p \geq r - 1$ sabemos que nosso algoritmo devolve
 - subvetores ordenados quando estes tem tamanho menor ou igual a 1.
- Supondo que nosso algoritmo ordena um subvetor de tamanho $n/2$,
 - verificamos que ele ordena um vetor de tamanho n ,
 - uma vez que a função intercala funciona corretamente.
- Note que é necessário provar, usando invariantes, a corretude dessa função.

Eficiência de tempo do mergeSort:

- Usamos uma árvore (binária) de recursão na análise.



$$\frac{n}{2^h} = 1 \Rightarrow 2^h = n \Rightarrow h = \lg n = \log_2 n$$

tam. subprob. nível i = $\frac{n}{2^i}$ # subprob. nível i = 2^i # níveis = $1 + \lg n$

tam. subprob. nível $i = \frac{n}{2^i}$ # subprob. nível $i = 2^i$ # níveis = $1 + \lg n$

- Curiosidade: outra maneira de chegar ao # de níveis igual a $\log_2 n + 1$, é:
 - no nível 0 temos n elementos no vetor,
 - $\log_2 n$ é o número de vezes que podemos dividir n por 2
 - antes dele se tornar menor ou igual a 1 (caso base).

Questão chave: qual o trabalho (não recursivo) realizado por nível da árvore?

- Uma chamada do mergeSort realiza basicamente um teste,
 - seguido de duas chamadas recursivas e uma chamada de intercala.
 - Como intercala é uma função com eficiência linear, i.e., $O(\text{tam. subvetor sendo intercalado})$
 - o trabalho não recursivo realizado por mergeSort
 - num vetor de tamanho m é $c * m$, para alguma constante c .
 - Assim, o trabalho realizado por problema do nível i é $c * \frac{n}{2^i}$
 - Portanto, o trabalho realizado por nível da árvore é dado
 - pelo número de subproblemas por nível vezes
 - o trabalho não recursivo realizado por subproblema, i.e.,
- $$\text{Trab}(i) = \# \text{subprob}(i) \cdot c \cdot \frac{n}{2^i} = 2^i \cdot c \cdot \frac{n}{2^i} = c n = O(n)$$
- Por fim, o trabalho total é dado pela soma no número de níveis da árvore
 - do trabalho realizado por nível desta,
 - [i.e., $\sum_{j=0.. \log_2 n} c * n = c * n \sum_{j=0.. \log_2 n} 1$]
 - $= c * n * (1 + \log_2 n) = cn \log_2 n + cn = O(n \log n)$
- $$\text{Trab. Total} = \sum_{j=0}^{\lg n} c \cdot n = c \cdot n (1 + \lg n) = O(n \cdot \lg n)$$
- Numa comparação rápida, para $n = 10^6$ e 10^9 temos:

n	10^6	10^9
$\lg n$	20	30
$n \lg n$	$2 \cdot 10^7$	$3 \cdot 10^{10}$
n^2	10^{12}	10^{18}

- Supondo um computador de 10 GHz (i.e., 10^{10} operações por segundo),
 - quanto tempo um algoritmo de ordenação $O(n \log n)$ leva para
 - ordenar vetores de 10^6 e 10^9 elementos, respectivamente?
- Responda às questões anteriores para um algoritmo de ordenação $O(n^2)$.

Estabilidade:

- Ordenação do mergeSort é estável, desde que a intercalação seja.
 - Por que? Mostre que isso vale usando indução.

Eficiência de espaço:

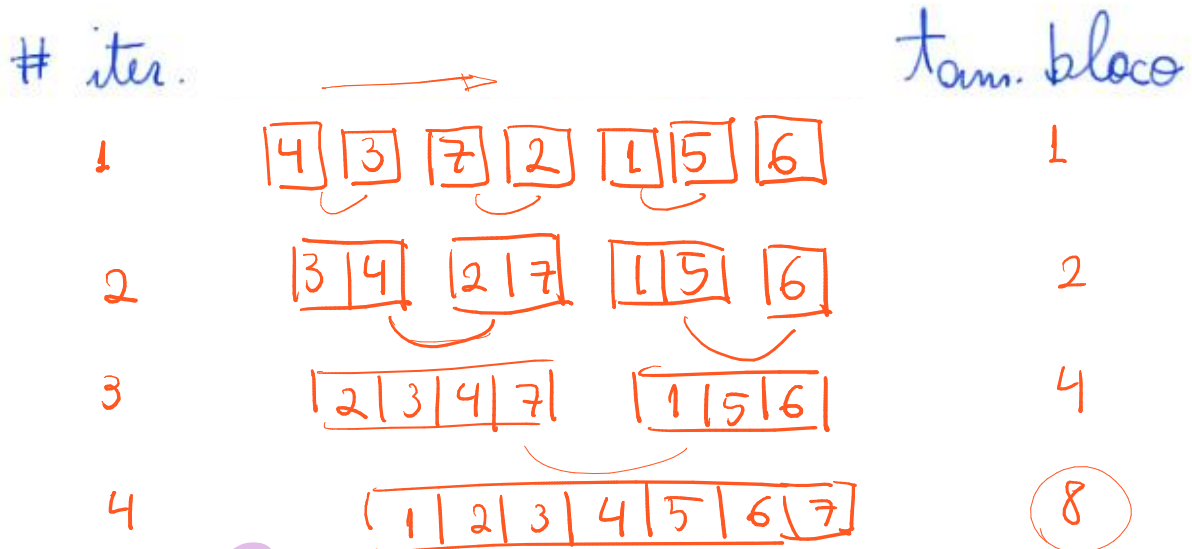
- Ordenação não é **in place**, pois usa a rotina intercala
 - que precisa de vetor auxiliar (e portanto memória)
 - proporcional ao tamanho dos vetores sendo intercalados.

Curiosidade:

- Podemos usar o algoritmo insertionSort como caso base do mergeSort.
- Isso é interessante porque o insertionSort tem constante menor que o mergeSort, sendo por isso mais rápido quando n é pequeno.

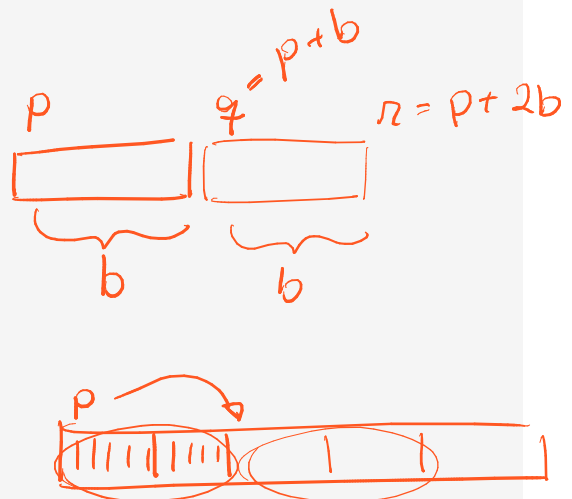
Bônus: algoritmo mergeSort iterativo,

- que em cada iteração percorre o vetor
 - intercalando pares de blocos de tamanho b .



- Note que, b dobra de tamanho a cada iteração.

```
void mergeSortI(int v[], int n) {
    int b = 1;
    while (b < n) {
        int p = 0;
        while (p + b < n) {
            int r = p + 2 * b;
            if (r > n) r = n;
            intercala1(v, p, p + b, r);
            p = p + 2 * b;
        }
        b = 2 * b;
    }
}
```



Animação:

- Visualization and Comparison of Sorting Algorithms - www.youtube.com/watch?v=ZZuD6iUe3Pc